Motivera alla svar. Spara uppgifterna (med mina kommentarer) när ni får tillbaka dem. Detta gäller alla inlämningsuppgifter och det är mycket viktigt

Uppvärmning

(i) Visa De Morgans lagar för Booleska algebror: $\overline{(a+b)} = \overline{a} \cdot \overline{b}$ och $\overline{(a \cdot b)} = \overline{a} + \overline{b}$. Du får endast använda vår Definition 23 på stencilen om relationer.

(ii) Varje element i en Boolesk algebra kan skrivas på ett unikt sätt som summan av atomer. Varför är detta så uppenbart för den Booleska algebran av alla delmängder till en mängd?

(iii) Låt B_n vara den Booleska algebran av alla binära strängar av längd n. Definiera $\phi : B_3 \longrightarrow B_2$ genom $\phi(x_1x_2x_3) = x_1x_2$. Är detta en Boolesk homomorfi?

(iv) Om vi istället sätter $\phi(x_1x_2x_3) = x_1y$, där $y = x_2 \cdot x_3$, är ϕ då en Boolesk homomorfi?

(v) Definiera $\phi : B_3 \longrightarrow B_1$ genom $\phi(x_1x_2x_3) = 1$ om $x_1+x_2+x_3$ udda, och $\phi(x_1x_2x_3) = 0$ annars. Är ϕ en Boolesk homomorfi?

(vi) Hur många isomorfier finns det från den Booleska algebran B_n till sig själv?

Att lämna in torsdag den 30 september

1. Visa att i en Boolesk algebra gäller $x \cdot x = x$, $x \cdot \hat{0} = \hat{0}$, och $\overline{\hat{0}} = \hat{1}$. Du får endast använda Definition 23 på stencilen om relationer!

2. Utgående från definitionen av Boolesk homomorfi (Definition 25) och Definition 23, visa att ϕ är en Boolesk homomorfi om ϕ bevarar $\cdot$ och $\overline{}$, det vill säga om $\phi(x \cdot y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$ och $\phi(\overline{x}) = \overline{\phi(x)}$.

3. Låt $S_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ delar } n\}$. Detta är ett gitter m.a.p. delbarhetsrelationen.

   Låt P_n beteckna delmängdsalgebran på mängden av primfaktorer till n. Låt
   $$\phi : S_n \to P_n$$
   vara funktionen som skickar talet $k \in S_n$ till mängden av primfaktorer i k. Exempelvis är $\phi(20) = \phi(2 \cdot 2 \cdot 5) = \{2, 5\}$.

   (a) Är ϕ en gitterhomomorfi?

   (b) I de fall då S_n är en boolesk algebra, är ϕ en boolesk isomorfi?

4. Låt $\mathcal{A}$ vara relationen "avkomma till," det vill säga att $x\mathcal{A}y$ betyder att x är avkomma till y. Låt M vara den motsvarande matrisen. Ge en enkel formel för matrisen G vars (i, j)-element är antalet gemensamma avkommor till i och j.

   Ledning: Vilken relation motsvaras av matrisen M^T, d v s transponatet till M?

   Relationen här kan ersättas med vilken som helst relation som är transitiv och antisymmetrisk. M a o en "partiell ordning" utan reflexivitet.

5. Låt G vara ett gitter och antag att x är ett element i G som har två olika komplement. Visa att G inte är distributivt. Ledning: Dela upp i två fall; där de två komplementen är jämförbara resp. icke jämförbara. Kom ihåg att $x \wedge y = x$ om och endast om $x \leq y$.

Bonusproblem (inget samarbete)

6. *Möbiusfunktionen* $\mu : G \times G \to \mathbb{Z}$, för ett ändligt gitter G kan definieras så här:

$$\mu(x,x) = 1 \text{ för alla } x \in G \quad \text{och} \quad \mu(x,y) = -\sum_{x \le z < y} \mu(x,z)$$

och $\mu(x,y) = 0$ om $x \not\le y$. Visa att vi i en delmängdsalgebra har $\mu(\emptyset, S) = (-1)^{|S|}$, där $|S|$ är antalet element i S.

Ytterligare övningar

1. I boken *Grundläggande digital- och datorteknik* finns, i avsnittet Boolesk algebra, nio såkallade "satser" för Boolesk algebra. Några av dessa ingår i vår alternativa definition av boolesk algebra. Visa de andra utgående enbart från vår definition.

2. Låt $S_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ delar } n\}$. Detta är ett gitter med avseende på relationen $aDb \iff a$ delar b. För vilka n är S_n en Boolesk algebra?

3. Låt M_R vara relationsmatrisen för en relation R. Kan man säga något allmänt om M_R:s inverterbarhet när R är en ekvivalensrelation respektive partiell ordning? Ledning: Varje partiell ordning är en delmängd till en total ordning.

För definitionen av rang, se stencilen om relationer

4. Hur många element av rang k finns det i delbarhetsgittret för S_{510510}?

   Ledning: Hitta en isomorfi från S_{510510} till en lämplig Boolesk algebra.

5. Låt G vara ett gitter och B en Boolesk algebra. Antag att det finns en funktion $\phi : B \longrightarrow G$, som bevarar $\hat{0}$, $\hat{1}$ och komplement, det vill säga $\phi(\hat{0}_B) = \hat{0}_G$, $\phi(\hat{1}_B) = \hat{1}_G$, och $\phi(\bar{x})$ är ett komplement (i G) till $\phi(x)$ för alla $x \in B$. Visa att G är en Boolesk algebra.

6. Låt M vara mängden av alla satslogiska utsagor. Definiera relationen $\sim$ på M genom

$$A \sim B \text{ om och endast om } B \iff A,$$

   d v s $A \sim B$ betyder att A och B är ekvivalenta utsagor. M a o är A sann om och endast om B är sann.

   Exempel: $\neg(P \vee Q) \iff (\neg P \wedge \neg Q)$, så $\neg(P \vee Q) \sim (\neg P \wedge \neg Q)$

   Observera att A och B är *utsagor*, inte (nödvändigtvis) variabler.

   (a) Visa att $\sim$ är en ekvivalensrelation på M.

   (b) Låt
$$K = \{[A]_\sim \mid A \in M\},$$
   d v s K är mängden av ekvivalensklasser i M med avseende på $\sim$.
   Definiera relationen Ψ på K via
$$[A]\Psi[B] \text{ om och endast om } A' \Rightarrow B' \text{ för något } A' \in [A] \text{ och något } B' \in [B].$$
   Visa att Ψ är en partiell ordning.

   (c) Finns det några minimala/maximala element i K_Ψ? Finns det ett största/minsta element i K_Ψ?

   (d) Är K_Ψ en boolesk algebra?

   (e) Om vi begränsar antalet variabler i våra utsagor till n, hur många element har då K_Ψ?

7. Låt $\sim$ vara en ekvivalensrelation på en mängd M och låt

$$D = \{A \subseteq M \mid \text{ om } x, y \in A \text{ då } x \sim y\}.$$

Låt P vara delmängdsalgebran på D. Visa att de maximala elementen i den partiella ordningen P är ekvivalensklasserna för $\sim$.

8. För vilka n är $\mu(1, n) \neq 0$ i delbarhetsgittret S_n? Eller, ännu bättre, bestäm $\mu(x, y)$ för godtyckliga x och y i S_n. Ledning: Titta på exemplen S_6, S_{12}, S_{30}, S_{90}.