DISKRET MATEMATIK E3 — HEMUPPGIFTER 5

HT 99

Motivera alla svar. Spara uppgifterna (med mina kommentarer) när ni får tillbaka dem.

## Uppvärmning

(i) Låt $G$ vara en ändlig graf och låt $\delta(x)$ beteckna graden av noden $x$. Visa att $\sum_{x \in G} \delta(x)$ är ett jämnt tal. Visa även att antalet noder av udda grad är jämnt.

(ii) Låt $T$ vara ett godtyckligt träd med $n$ noder. Bestäm $T$:s kromatiska polynom.

(iii) Bestäm det kromatiska polynomet (på lämplig form!) för den fullständiga grafen $K_n$.

(iv) Låt $G$ vare en bipartit graf med ett udda antal noder. Visa att $G$ inte kan ha en Hamiltoncykel.

(v) Hur många Eulercykler finns det i $K_n$ (den fullständiga grafen på $n$ noder)? Hur många Hamiltoncykler? Två cykler bör betraktas som samma cykel om de innehåller samma kanter.

(vi) Låt $G$ vara en ändlig riktad graf som är *acyklisk*, d v s som inte har någon riktad cykel. Visa att $G$ har en *källa*, d v s en nod med inga kanter riktade *till* sig. Visa att $G$ även har en *sänka*, d v s en nod med inga kanter riktade från sig.

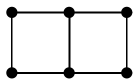
Ge exempel på en riktad acyklisk graf som har varken sänka eller källa. *Visa* att den är acyklisk!

(vii) Visa att en graf $G$ har åtminstone $\binom{k}{2}$ kanter där $k = \chi(G)$.

(viii) Visa att $G$ är ett träd *omm* det finns en unik stig mellan varje par av noder.

(ix) Visa att komponenterna i $G$ utgör en partition av noderna i $G$.

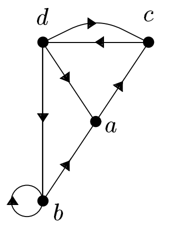
## Att lämna in torsdag den 14 oktober



1. Bestäm det kromatiska polynomet för grafen i marginalen. Kolla att ditt svar ger rätt värden (men lämna inte in de uträkningarna!). (0, 0, 2, 54, 588, 3380, 13230)

2. Visa att komplementet till en graf $G$ är sammanhängande om $G$ inte är det. Komplementet till $G$ är grafen med samma noder som $G$ men där två noder är grannar om och endast om de inte är det i $G$.

   Måste komplementet till $G$ vara osammanhängande om $G$ är sammanhängande?




3. Hur många riktade vägar av längd 6 slutar i $a$ i den riktade grafen till höger?

   Bonus: Låt $K$ vara kantmatrisen till grafen ifråga. Det verkar som att de första tre kolonnerna i $G^k$ är lika, för alla $k \geq 2$. Är det så? Förklaringen bör handla om vägar.

4. Låt $\alpha(G)$ vara antalet noder i en största stabil mängd i $G$. Visa att $\chi(G) \geq |G|/\alpha(G)$.

5. På en fest skakar vissa gäster hand med varandra. Är det möjligt att inga två av gästerna skakade hand med lika många? Om svaret är ja, ge ett exempel. Annars, översätt till ett grafproblem och ge ett kort och enkelt bevis!

*Graden* till en nod är antalet kanter den har

## Bonusproblem (Samarbete tillåtet denna gång! (Men bör redovisas))

6. Låt $G$ vara en graf med $n$ noder. Visa att $(-1)^n \chi_G(-1)$ är lika med antalet acykliska orienteringar av $G$. Ledning: Skriv $\chi_G(n)$ i basen $\{(n)_i\}$

7. Beskriv alla grafer som är sammanhängande och har sammanhängande komplement.