# Kromatiska polynom

Att färglägga en graf $G$ är att ge varje nod i $G$ en färg så att inga grannar (två noder med en kant sinsemellan) får samma färg. Att färglägga $G$ med (högst) $n$ färger innebär att vi har $n$ färger att välja bland och skall använda några av dessa för att färglägga $G$.

Här är en mer precis definition.

**Definition 1** Låt $G$ vara en graf med nodmängd $N$. En *färgläggning av $G$ med $n$ färger* är en funktion $f : N \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$ så att $f(x) \neq f(y)$ om $x$ och $y$ har en kant sinsemellan.

**Definition 2** Låt $G$ vara en ändlig graf. Det *kromatiska polynomet till $G$* är funktionen $\chi_G(n)$, definierad för varje positivt heltal $n$ som antalet färgläggningar av $G$ med $n$ färger.

Sats: Det kromatiska polynomet är ett polynom i $n$.

Observera att det *kromatiska talet* för $G$, $\chi(G)$, är lika med det minsta positiva heltalet $n$ för vilket $\chi_G(n)$ är större än 0.

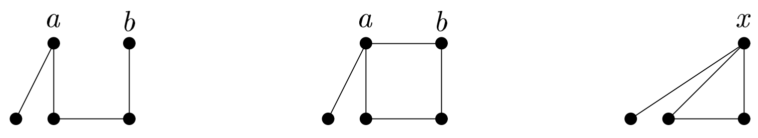
Det finns ingen snabb algoritm för att bestämma det kromatiska talet till en graf $G$ och därmed finns det inte heller något snabbt sätt att bestämma det kromatiska polynomet till $G$. Mer exakt tillhör dessa problem klassen NP, det vill säga att det inte finns någon algoritm som i polynomiell tid ger svaren.

Ett sätt att bestämma det kromatiska polynomet till en graf $G$ är följande:

**Sats 3** *Given en ändlig graf $G$, och två olika noder $a, b$ i $G$, så att $(a, b)$ inte är en kant i $G$, låt $G_{a-b}$ vara grafen som fås genom att lägga till en kant mellan $a$ och $b$ i $G$, och låt $G_{a=b}$ vara grafen som fås genom att ersätta $a$ och $b$ med en nod $x$ så att $x$ har en kant till varje nod som $a$ eller $b$ har en kant till i $G$. Då är*

$$\chi_G(n) = \chi_{G_{a-b}}(n) + \chi_{G_{a=b}}(n). \tag{1}$$

**Bevis:** Varje färgning av $G$ där $a$ och $b$ har olika färger motsvarar en färgning av $G_{a-b}$ och omvänt. Varje färgning av $G$ där $a$ och $b$ ha samma färg motsvarar en färgning av $G_{a=b}$ och omvänt. $\square$




$\chi_G(n) \quad = \quad \chi_{G_{a-b}}(n) \quad + \quad \chi_{G_{a=b}}(n)$

Observera att den rekursiva formeln i Sats 3 även kan skrivas så här:

$$\chi_{G_{a-b}}(n) = \chi_G(n) - \chi_{G_{a=b}}(n). \tag{2}$$

Att använda denna version av formeln innebär att avlägsna kanter från $G$ tills vi bara har isolerade noder kvar. Vilken av dessa två formler som är effektivast för att bestämma det kromatiska polynomet till en graf $G$ beror på $G$:s struktur. Om $G$ är gles, det vill säga har relativt få kanter, då är (2) oftast att föredra, men (1) om $G$ har relativt många kanter.

*Stable* eller *independent* på engelska

**Definition 4** Låt $G$ vara en graf och $M$ en mängd av noder i $G$. Mängden $M$ är *stabil* om inga två noder i $M$ utgör en kant i $G$.

**Definition 5** Den $i$-te *fallande fakulteten* av $n$ är $(n)_i = n(n-1)(n-2)\cdots(n-i+1)$. Vi sätter $(n)_0 = 1$.

En färgning av $G$ med $k$ färger ger alltid upphov till en partition av noderna i $G$ i $k$ stabila mängder, eftersom varje mängd av likfärgade noder måste vara stabil. Omvänt ger en partition av noderna i $G$ i $k$ stabila mängder en färgning av $G$ med $k$ färger, genom att de stabila mängderna tilldelas var sin färg. Om vi har $n$ färger till vårt förfogande kan detta göras på $n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$ olika sätt, det vill säga på $(n)_k$ olika sätt. Därav följande sats.

**Sats 6** *Låt $S_G(k)$ vara antalet sätt att dela upp noderna i $G$ i $k$ stabila mängder. Då har vi*

$$\chi_G(n) = \sum_k S_k(n)_k.$$

Ur denna sats följer direkt att $\chi_G(n)$ är ett polynom i $n$, för $(n)_k$ är uppenbarligen ett polynom i $n$ för varje $k$. Det följer också att $\chi(G_n)$ har heltalskoefficienter.