Relationer

Alla vet vad en relation är. Den matematiska definitionen av relation syftar till att formalisera detta begrepp för att det skall kunna användas i olika — och mycket vidare — sammanhang än vad som är vanligt i vardagsspråk. Att vara släkting till någon, eller barn till någon, eller att gå i samma klass som någon, är exempel på vanliga relationer. Men vi vill även studera sådana relationer som att vara äldre än någon, eller för två tal att ge samma rest när de delas med 18, eller för en binär sträng $\mathbf{x}$ att ha ettor på alla platser där en sträng $\mathbf{y}$ har ettor.

En relation definieras på en mängd (som kan bestå av människor, eller tal, eller vad som helst) och den kan beskrivas genom att säga vilka par av element i mängden står i den givna relationen till varandra. Mängden av alla (ordnade) par av element i en mängd kallas *kryssprodukten* av mängden med sig själv, och definitionen blir så här:

Definition 1 En *relation* $\mathcal{R}$ på en mängd M är en delmängd i kryssprodukten $M \times M$.

Observera att kryssprodukten består av alla *ordnade* par av element från M. Det innebär att paret (a, b) *inte* är detsamma som (b, a). Med andra ord finns en ”riktning” i en relation $\mathcal{R}$ eftersom förekomsten av (a, b) i $\mathcal{R}$ — vilket betyder att a står i relationen $\mathcal{R}$ till b — *inte* medför att b står i relationen $\mathcal{R}$ till a.

Låt $\mathcal{R}$ vara relationen ”mindre än” på mängden $M = \{1, 2, 3\}$. Då består $\mathcal{R}$ av de tre paren $(1, 2), (1, 3)$ och $(2, 3)$, som alla är element i $M \times M$. Alltså kan vi skriva

$$\mathcal{R} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}.$$

Ett annat sätt att beskriva att 1 står i relationen $\mathcal{R}$ till 2 är att skriva $1\mathcal{R}2$.

Vi studerar främst följande fyra egenskaper hos relationer:

Definition 2 En relation på en mängd M är

1. *reflexiv* om det för varje $x \in M$ gäller $x\mathcal{R}x$,
2. *symmetrisk* om det för varje par $x, y \in M$ gäller att om $x\mathcal{R}y$ då $y\mathcal{R}x$,
3. *antisymmetrisk* om det för varje par $x, y \in M$ gäller att om $x\mathcal{R}y$ och $y\mathcal{R}x$ då är $x = y$,
4. *transitiv* om det för varje $x, y, z \in M$ gäller att om $x\mathcal{R}y$ och $y\mathcal{R}z$, då $x\mathcal{R}z$.

Observera att endast reflexiviteten ställer några krav på att något element skall vara relaterat till något annat i M. Den tomma relationen, d v s relationen $\mathcal{R}$ där $x\mathcal{R}y$ inte gäller för något par (x, y), är symmetrisk, antisymmetrisk och transitiv (men inte reflexiv, om $M \neq \emptyset$). I synnerhet behöver en relation varken vara symmetrisk eller antisymmetrisk, och en relation kan vara både och.

Relationen "=" har alla fyra egenskaperna och detta är den enda relationen som gör det (bevisa det!).

Definition 3 En relation som är reflexiv, symmetrisk och transitiv kallas *ekvivalensrelation.*

Den viktigaste ekvivalensrelationen för oss är den som används vid "kongruensräkning."

Definition 4 Låt n vara ett positivt heltal. Relationen "kongruens modulo n," som betecknas $\equiv_n$, definieras på mängden av alla heltal genom

$$x \equiv_n y \iff x - y \text{ är delbart med } n.$$

Det är vanligt att använda symbolen | för att beteckna delbarhet. Närmare bestämt läses "$a|b$" som "a delar b."

Definition 5 Låt $\sim$ vara en ekvivalensrelation på M och $a \in M$. Då är a:s *ekvivalensklass* (med avseende på M) mängden $[a] = \{x \in M \mid a \sim x\}$.

Definition 6 Låt M vara en mängd och $A_1, A_2, \ldots, A_n$ delmängder i M. Då är $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ en *partition av* M om följande två villkor är uppfyllda:

(i) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = M$,

(ii) $A_i \cap A_j = \emptyset$ om $i \neq j$.

En partition av en mängd M är alltså en mängd av icke-tomma delmängder till M så att varje element i M ligger i precis en av delmängderna.

Sats 7 *Ekvivalensklasserna till en ekvivalensrelation på en mängd M utgör en partition av M.*

Med andra ord, om R är en ekvivalensrelation på en mängd M så tillhör varje element i M exakt en ekvivalensklass m.a.p. R.

För många ekvivalensrelationer är det uppenbart vilka ekvivalensklasserna är. Om t ex relationen är "att vara född samma år," då består varje ekvivalensklass av alla de personer som är födda ett visst år. För ekvivalensrelationen "kongruens modulo 4" (på $\mathbb{N}$) finns exakt fyra ekvivalensklasser, nämligen $\{0, 4, 8, \ldots\}$, $\{1, 5, 9, \ldots\}$, $\{2, 6, 10, \ldots\}$, $\{3, 7, 11, \ldots\}$. Det är ofta användbart att välja ut en representant för varje ekvivalensklass. För ekvivalens modulo 4 väljer man gärna talen 0, 1, 2, 3, som vart och ett är det minsta i sin klass. Mer allmänt, för relationen "kongruens modulo n," väljer man oftast talen $0, 1, 2, \ldots, n-1$ som representanter för ekvivalensklasserna. Det är faktiskt just det som de flesta datorspråk använder i sin "moduloräkning."

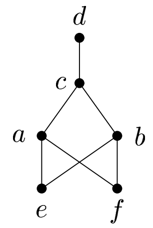
Definition 8 En relation som är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv kallas *partiell ordning.*

Ett exempel på en partiell ordning är relationen $\mathcal{R}$ på mängden av alla positiva heltal som definieras av

$$x\mathcal{R}y \iff x \text{ delar } y.$$

Man betecknar ofta partiella ordningar med $\leq$. En mängd P tillsammans med en partiell ordning kallas *pomängd*.

En partiell ordning på en ändlig mängd M kan beskrivas med ett *Hassediagram*. I marginalen finns Hassediagrammet för den partiella ordningen på $\{a, b, c, d, e, f\}$ som består av paren (e, a), (e, b), (f, a), (f, b), (a, c), (b, c) och (c, d), tillsammans med alla de par som följer av dessa via transitiviteten, såsom (e, d) som följer av (e, a), (a, c) och (c, d) tillsammans. Dessutom finns förstås varje par (x, x) med i relationen. Observera att man kan "läsa" i Hassediagrammet att $e \leq d$ eftersom det finns en väg som går uppåt från e till d.



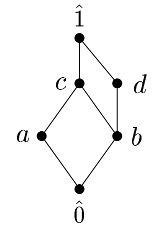
Definition 9 Låt P vara en pomängd (där relationen betecknas $\leq$) och $x, y \in P$. En *övre gräns* för paret x, y är ett element $z \in P$ så att $x \leq z$ och $y \leq z$. En *undre gräns* definieras på analogt sätt.

En *minsta övre gräns* för x, y är ett element z så att z är en övre gräns för x, y och så att varje övre gräns w för x, y uppfyller $z \leq w$. Detta betecknas med $x \vee y = z$. En *största undre gräns* definieras analogt och betecknas med $x \wedge y$.

I Hassediagrammet ovan syns att både c och d är övre gränser för a och b, men den minsta övre gränsen för a och b är $a \vee b = c$. Vidare är både e och f undre gränser för a och b, men ingen av dessa är en största undre gräns, eftersom e och f inte är jämförbara. Alltså existerar inte $a \wedge b$. Däremot är $c \vee d = d$ och $c \wedge d = c$, och mer allmänt har vi att om $x \leq y$ då är $x \vee y = y$ och $x \wedge y = x$.

Definition 10 Ett *gitter* är en pomängd där $x \vee y$ och $x \wedge y$ existerar för varje par (x, y).

Definition 11 Ett element m i ett gitter (eller pomängd) G kallas $\hat{0}$ om $m \leq x$ för alla $x \in G$. Om däremot $x \leq m$ för alla $x \in G$ då kallas m för $\hat{1}$.



I gittret ovan är a och d varandras komplement, men b och c har inga komplement

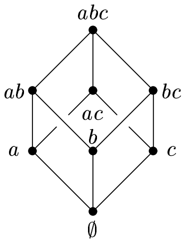
Vi säger även att $\hat{0}$ är ett *minsta element* i G och att $\hat{1}$ är ett *största element*. Det är lätt att visa att det bara kan finnas ett minsta och ett största element i ett gitter (pomängd).

Definition 12 Låt G vara ett gitter med $\hat{0}$ och $\hat{1}$. Ett *komplement* till $x \in G$ är ett element $\bar{x} \in G$ så att $x \wedge \bar{x} = \hat{0}$ och $x \vee \bar{x} = \hat{1}$. G sägs vara *komplementerat* om varje element i G har ett komplement.

Definition 13 Ett gitter G är *distributivt* om det för alla a, b, c i G gäller

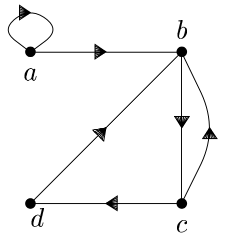
$$\begin{aligned} a \wedge (b \vee c) &= (a \wedge b) \vee (a \wedge c), \\ a \vee (b \wedge c) &= (a \vee b) \wedge (a \vee c). \end{aligned}$$

Definition 14 En *Boolesk algebra* är ett komplementerat, distributivt gitter.



Ett exempel på en Boolesk algebra — och kanske det mest kända — är *delmängdsalgebran* på en mängd M. Elementen i detta gitter är delmängderna till M och relationen (den partiella ordningen) är inklusion, det vill säga att A är relaterad till B om A är en delmängd i B. I marginalen har vi delmängdsalgebran till mängden $\{a, b, c\}$. Kontrollera att detta är ett komplementerat distributivt gitter (vilket innebär att konstatera att varje delmängd till M har ett komplement (relativt M) och att de distributiva lagarna gäller för union och snitt av mängder).

En relation kan representeras som en matris, och som en riktad graf. Låt t ex $\mathcal{R}$ vara relationen på mängden $\{a, b, c, d\}$ som består av paren (a, a), (a, b), (b, c), (c, b), (c, d) och (d, b). Då har vi följande graf och matris:



$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Sats 15 *Låt $\mathcal{R}$ vara en relation (på en ändlig mängd) och $M = (m_{ij})$ den motsvarande matrisen. Då gäller följande:*

omm = om och endast om

1. *$\mathcal{R}$ är reflexiv omm $m_{ii} = 1$ för alla i.*
2. *$\mathcal{R}$ är symmetrisk omm M är symmetrisk, d v s omm $m_{ij} = m_{ji}$ för alla i.*
3. *$\mathcal{R}$ är antisymmetrisk omm $([i \neq j \quad \text{och} \quad m_{ij} = 1] \Rightarrow m_{ji} = 0)$*
4. *$\mathcal{R}$ är transitiv omm $M * M \leq M$, där $A * B$ är AB med alla positiva element reducerade till 1 och $X \leq Y$ betyder att varje element i X är mindre än eller lika med motsvarande element i Y.*

Påståendena 1, 2 och 3 i satsen är uppenbara. För att se att 4 gäller måste man studera hur $M * M$ bildas. Det gör vi inte nu, men återkommer till detta.

Definition 16 Låt $\mathcal{R}$ och $\mathcal{S}$ vara relationer på en mängd M. *Kompositionen av $\mathcal{R}$ med $\mathcal{S}$* är relationen på M som definieras av

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{S} = \{(x, y) \mid \text{ det finns } z \in M \text{ så att } x\mathcal{R}z \text{ och } z\mathcal{S}y\}.$$

Sats 17 *Om $M_\mathcal{R}$ och $M_\mathcal{S}$ är matriserna för $\mathcal{R}$ respektive $\mathcal{S}$, då är $M_\mathcal{R} * M_\mathcal{S}$ matrisen för $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$.*

Kompositionen av två relationer är inte alltid meningsfull, men kan i andra fall vara intressant. Låter vi t ex $x\mathcal{R}y$ beteckna relationen att x är barn till y, då blir $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}$ relationen ”att vara barnbarn til.”