Låt nu $\mathcal{R}^2$ beteckna relationen $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}$ och, mer allmänt, låt $\mathcal{R}^n$ beteckna relationen $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \circ \cdots \circ \mathcal{R}$ ($n$ gånger). Om vi låter $\mathcal{A}$ vara relationen som är unionen av relationerna $\mathcal{R}, \mathcal{R}^2, \mathcal{R}^3, \ldots$, där $x\mathcal{R}y$ betyder "$x$ är barn till $y$," då betyder $x\mathcal{A}y$ att $x$ är avkomma till $y$.

**Definition 18** Låt $\mathcal{R}$ vara en relation på mängden $M$. Det *transitiva höljet till* $\mathcal{R}$ är relationen (på $M$) som definieras av $T(\mathcal{R}) = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{R}^n = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^2 \cup \mathcal{R}^3 \cup \cdots$.

Att det kallas transitivt hölje beror på att $T(\mathcal{R})$ är den minsta relation som är transitiv och innehåller $\mathcal{R}$. I stencilen *Kantmatriser och vägmatriser* förklaras detta i princip, fast där behandlas frågan bara för kanter och vägar i en graf. Börjar vi med en graf som representerar en relation borde sambandet mellan relationens transitiva hölje och vägmatrisen för grafen bli förståelig. Nämligen, när en relation $\mathcal{R}$ beskrivs med en riktad graf $G$ motsvarar varje par i relationen en riktad kant i grafen. Det transitiva höljet är då relationen vars par motsvarar noder $x, y$ i $G$ för vilka det finns en riktad *väg* från $x$ till $y$. I synnerhet består relationen $\mathcal{R}^k$ av de par $(x, y)$ för vilka det finns en väg av längd $k$ från $x$ till $y$.

Att en mängd är minst bland en (möjligtvis oändlig) samling mängder betyder här att den är en delmängd till alla mängder i samlingen.

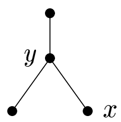
En tänkbar tillämpning är följande. Antag att vi har ett datorprogram med ett stort antal underrutiner och vi vill veta vilka rutiner som är beroende av vilka andra. En rutin $R$ är beroende av en annan rutin $S$ om $R$ anropar $S$, men även om det finns en kedja av anrop från $R$, via andra rutiner, till $S$. Om vi låter $\mathcal{A}$ vara relationen "anropar," så $R\mathcal{A}S$ betyder att $R$ anropar $S$, då är det transitiva höljet $T(\mathcal{A})$ till $\mathcal{A}$ precis relationen "beroende av." Om nu $M$ är matrisen för $\mathcal{A}$, då ges matrisen för $T(\mathcal{A})$ av

$$M_T = M \oplus M^2 \oplus \cdots \oplus M^n,$$

där $n$ är antalet rutiner i programmet och $\oplus$ betecknar boolesk addition (elementvis). Vi kan även se i $M_T$ om det finns någon rekursion i rutinerna, det vill säga om en rutin är beroende av sig själv. Hur?

Varför räcker det med $M^n$?

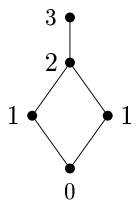
**Definition 19** *Om $x$ och $y$ är element i ett gitter så att $x \leq y$ och så att det inte finns något $z$ skilt från $x$ och $y$ så att $x \leq z \leq y$, då säger vi att $y$* täcker *$x$, vilket betecknas $x \lessdot y$.*



$y$ täcker $x$

I Hassediagrammet betyder detta att $y$ ligger strax ovanför $x$.

**Definition 20** Ett (ändligt) gitter $G$ är *graderat* om det för varje $x \in G$ gäller att varje *kedja* $\hat{0} \lessdot x_1 \lessdot x_2 \lessdot \cdots \lessdot x$ har samma längd. I så fall är *rangen* av $x$ lika med längden (antal element minus ett) av en sådan kedja.



Rang

Rangen av ett element $x$ är alltså längden av varje uppåtgående väg längs kanter i Hassediagrammet från $\hat{0}$ till $x$.

**Definition 21** Låt $G$ och $H$ vara två gitter. En *(gitter)homomorfi från $G$ till $H$* är en funktion $\phi : G \longrightarrow H$ så att

(i) $\phi(x \vee y) = \phi(x) \vee \phi(y)$, och

(ii) $\phi(x \wedge y) = \phi(x) \wedge \phi(y)$

för alla $x, y \in G$. Om $\phi$ dessutom är bijektiv då är $\phi$ en *isomorfi.*

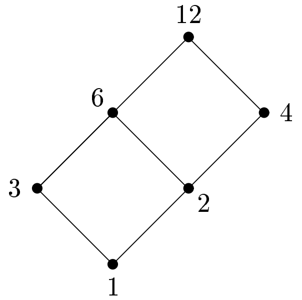
En homomorfi bevarar i någon mån gitterstrukturen i $G$, d v s att $\phi$ avbildar $G$ på något *delgitter* av $H$ (ett delgitter är en delmängd $M$ i ett gitter $H$ så att $M$ är ett gitter med avseende på relationen i $H$). Om $\phi$ är injektiv (inga två element i $G$ skickas till samma element i $H$), då avbildas $G$ på en "kopia" av sig självt i $H$. Om $\phi$ är en isomorfi, då är $G$ och $H$ "identiska" i någon mening. I synnerhet är deras Hassediagram identiska (bortsett från namnen på elementen).

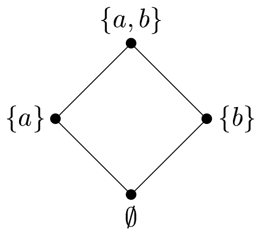
Låt $S_{12}$ vara delbarhetsgittret av alla delare till 12 och låt $B_2$ vara delmängdsalgebran på mängden $\{a, b\}$. Definiera funktionerna $\phi : S_{12} \longrightarrow B_2$ och $\psi : B_2 \longrightarrow S_{12}$ så här:

$$\phi(1) = \emptyset, \quad \phi(2) = \{b\}, \quad \phi(3) = \{a\}, \quad \phi(6) = \{a, b\}, \quad \phi(4) = \{b\}, \quad \phi(12) = \{a, b\},$$

$$\psi(\emptyset) = 1, \quad \psi(\{a\}) = 3, \quad \psi(\{b\}) = 2, \quad \psi(\{a, b\}) = 6.$$

Båda är homomorfier. Vi ser exempelvis att $\phi(3 \vee 4) = \phi(12) = \{a, b\} = \{a\} \vee \{b\} = \phi(3) \vee \phi(4)$. Om vi studerar Hassediagrammen för dessa gitter kan vi se på ett "grafiskt" sätt hur $\phi$ och $\psi$ verkar.




**Sats 22** *Låt $\phi : G \longrightarrow H$ vara en gitterhomomorfi. Då är $\phi(G) = \{\phi(x) \mid x \in G\}$ ett delgitter till $H$.*

I exemplet ovan syns till exempel att $\psi(B_2)$ består av den "nedre kvadraten" i $S_{12}$, vilken är ett gitter, nämligen gittret $S_6$. Definierar vi $\psi$ som en funktion från $B_2$ till $S_6$, men låter dess värden vara som ovan, då blir $\psi$ en isomorfi.

Se Definition 14

**Definition 23** (Alternativ definition av Boolesk algebra) En *boolesk algebra* är en mängd $M$ tillsammans med två associativa binära operationer, $\cdot$ och $+$, en unär operation, $\overline{\phantom{x}}$, och två element $\hat{0}$ och $\hat{1}$, som uppfyller följande villkor för alla element $x, y, z \in M$:

1. $x \cdot y = y \cdot x, \qquad x + y = y + x,$
2. $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z), \qquad x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z),$
3. $x \cdot \hat{1} = x, \qquad x + \hat{0} = x,$
4. $x \cdot \overline{x} = \hat{0}, \qquad x + \overline{x} = \hat{1}.$

Vi visar nu att denna definition ger upphov till en partiell ordning. Denna partiella ordning är naturligtvis just en Boolesk algebra, men att visa att Definitionerna 14 och 23 är *ekvivalenta* — d v s att båda definierar samma mängd av partiella ordningar — kräver mer arbete.

**Sats 24** *Låt $M$ vara en mängd med operationer som i Definition 23. Definiera relationen $\leq$ på $M$ genom*

$$x \leq y \iff x \cdot y = x.$$

*Då är $\leq$ en partiell ordning på $M$.*

**Bevis:** Eftersom $x \cdot x = x$ (enligt hemuppgift!) har vi $x \leq x$, så $\leq$ är reflexiv.

Vidare har vi att om $x \leq y$ och $y \leq x$ då är $x \cdot y = x$ och $y \cdot x = y$, men $x \cdot y = y \cdot x$, vilket medför att $x = y$, så $\leq$ är antisymmetrisk.

Antag att $x \leq y$ och $y \leq z$. Då är $x \cdot y = x$ och $y \cdot z = y$, så $x \cdot z = (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = x \cdot y = x$, vilket betyder att $x \leq z$ och därmed att $\leq$ är transitiv. $\square$

I det som följer kommer vi att använda $\cdot$ istället för $\wedge$ och $+$ istället för $\vee$ för att beteckna de binära operationerna i en Boolesk algebra.

**Definition 25** Låt $B$ och $C$ vara två Booleska algebror. En *boolesk homomorfi* är en funktion $\phi : B \longrightarrow C$ som uppfyller följande villkor för alla $x, y$ i $B$:

(i) $\phi(x \cdot y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$,

(ii) $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$,

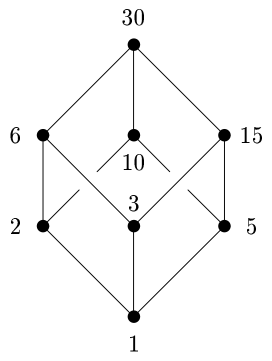
(iii) $\phi(\overline{x}) = \overline{\phi(x)}$,

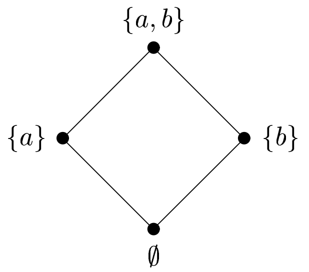
(iv) $\phi(\hat{0}_B) = \hat{0}_C, \ \phi(\hat{1}_B) = \hat{1}_C$. (Här står $\hat{0}_B$ för $\hat{0}$-elementet i $B$ etc.)

Om $\phi$ dessutom är bijektiv är $\phi$ en *Boolesk isomorfi.*

Observera att de första två villkoren i definitionen säger att $\phi$ är en gitterhomomorfi.

Låt nu $S_{30}$ vara delbarhetsgittret för 30 och låt $B_2$ vara mängdalgebran för en mängd med två element. Deras respektive Hassediagram ser ut så här:




Definiera funktionen $\phi : S_{30} \longrightarrow B_2$ på följande sätt:

$$\phi(1) = \phi(3) = \emptyset, \qquad \phi(2) = \phi(6) = \{a\},$$
$$\phi(5) = \phi(15) = \{b\}, \qquad \phi(10) = \phi(30) = \{a, b\}.$$

Detta är en Boolesk homomorfi, vilket kan verifieras genom att kontrollera att $\phi(x \cdot y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$ och $\phi(\overline{x}) = \overline{\phi(x)}$, för alla $x, y$ i $S_{30}$. (Se Inlämningsuppgift 3). Exempelvis har vi att $\phi(3+5) = \phi(15) = \{b\} = \emptyset + \{b\} = \phi(3) + \phi(5)$ och $\phi(\overline{2}) = \phi(15) = \{b\} = \overline{\{a\}} = \overline{\phi(2)}$.

Att $\phi$ bevarar i någon utsträckning strukturen i $S_{30}$ kan ses på olika sätt. Till exempel skulle vi kunna säga att $\phi$ ”kollapsar” den övre kvadraten i Hassediagrammet på den nedre och sedan skickar 2 till $\{a\}$, 5 till $\{b\}$ etc. Vi kan som sagt tänka oss att $\phi$ först ”projicerar” hela $S_{30}$ på $S_6$ (som motsvaras av den nedre kvadraten) för att sedan byta varje tal mot en delmängd. Vi kan också säga att kollapsen motsvarar att vi delar bort 3 i de tal i $S_{30}$ som är multiplar av 3.

Om man däremot tänker sig att $S_{30}$ motsvarar delmängdsalgebran för mängden $\{a, b, c\}$, på så sätt att 2 motsvarar $\{a\}$, 5 motsvarar $\{b\}$ och 3 motsvarar $\{c\}$, då kan man säga att $\phi$ motsvarar det att man helt enkelt tar bort elementet $c$ ur alla delmängderna.

Se Definition 19

**Definition 26** En *atom* i ett gitter är ett element som täcker $\hat{0}$. En *koatom* är ett element som täcks av $\hat{1}$.

Vi ger nu en följd av satser som tillsammans har som konsekvens (Sats 30) att varje Boolesk algebra är isomorf med en delmängdsalgebra.

**Sats 27**

*(i) Om $x$ är en atom i en Boolesk algebra $B$, då gäller för alla $y \in B$ att $xy = \hat{0}$ eller $xy = x$.*

*(ii) Om $x_1, x_2$ är atomer i $B$ och $x_1 \neq x_2$, då är $x_1 x_2 = 0$.*

**Sats 28** *Om $x_1, x_2, \ldots, x_n$ är alla atomerna i en Boolesk algebra $B$ och $x \in B$ ett element så att $xx_i = \hat{0}$ för alla $i$, då är $x = \hat{0}$.*

Detta är uppenbart för delmängds-algebran

**Sats 29** *Varje element i en Boolesk algebra kan skrivas på ett unikt sätt som summan av atomer (och som produkten av koatomer).*

**Sats 30** *Varje Boolesk algebra är isomorf med delmängdsalgebran för någon mängd.*

Det följer av Sats 30 att en Boolesk algebra med $n$ atomer har $2^n$ element. Av Sats 29, tillsammans med en av inlämningsuppgifterna, följer att en boolesk homomorfi bestäms fullständigt av sin verkan på atomerna (eller koatomerna).

**Definition 31** Låt $f$ vara en formel vars variabler är element i ett gitter eller Boolesk algebra. Den *duala formeln* till $f$ är den formel man får genom att byta $\wedge$ mot $\vee$ och tvärtom, och $\hat{0}$ mot $\hat{1}$ och tvärtom.

**Dualitetsprincipen:** Låt $f$ vara en formel som håller i alla gitter (Booleska algebror). Då håller dualen till $f$ också i alla gitter (Booleska algebror).

Observera att vi i Definition 23 har varje likhet på två former, som är varandras dualer (där $+$ motsvarar $\vee$ och $\cdot$ motsvarar $\wedge$).

Det intuitiva beviset av Dualitetsprincipen består i att vända upp och ned på Hassediagrammen till alla gitter/Booleska algebror!