

MATEMATISK MODELLERING - PROJEKT  
DJURFÖRFLYTTNINGAR

Viktor Griph  
Anders Jonsson

5 juni 2005

# 1 Bakgrund

Detta projekt är tänkt att simulera hur en population djur förflyttar sig över ett geografiskt område beroende på tillgången på föda. I simulationen ingick tre typer av djur; två växtätare och en köttätare. Dessa har grovt modellerats efter harar, rådjur och vargar. Dessutom har tre olika typer av landskap modellerats; slättland, skog, och snårskog. Varje landskap hade en viss mängd föda tillgänglig. Denna kunde utnyttjas av både rådjur och harar, dock i olika hög grad. För att göra det hela intressantare modellerades även årstider, med olika tillväxt/förmultning per årstid för de olika landskapstyperna, samt möjligheten att låta djuren röra sig i ett begränsat område. Vi modellerade även att vargarna äter upp de andra djuren. Växtätarna påverkar dock inte mängden tillgänglig föda åt sig själva.

Det vi ville undersöka var om det eventuellt gick att få ett stationärt tillstånd i vår modell, eller om de värden som modellen graviterade mot var helt beroende på fördelningen av djur från början.

## 2 Modell

För att skapa vår modell valde vi att använda JAVA, eftersom detta skulle ge oss större frihet att ändra på diverse parametrar än t.ex. MATLAB, trots att detta i princip också skulle kunna användas för beräkning av vår modell. Modellen för förflyttning av djuren skulle ha kunnat skapas med hjälp av sannolikhetsmatriser, men eftersom dessa skulle ge upphov till 'bråkdjur', befanns de inte vara lämpliga.

Varje terrängtyp modellerades med 8 parametrar: Tillgången på växter, tillväxten av dessa under vår, sommar, höst och vinter (årstillväxten sattes som 1, vilket även var värdet på den totala tillväxten under ett år med årstidsmodellen), andelen av växterna som hararna och rådjuren kunde utnyttja (dessa summerade inte nödvändigtvis till 1), samt en parameter för hur väl skyddade hararna var. Den sista parametern gör hararna lite olika attraktiva som bytesdjur för vargarna i de olika områdena. I övrigt kan sägas att ett rådjur modellerades att ha samma näringsbehov samt samma mängd 'vargnäring' som två harar.

### 2.1 Förflyttning

Djurens förflyttning mellan olika rutor baserades som tidigare nämnts på tillgången till föda: I varje ruta lades mängden mat, multiplicerat med en faktor 5, 3 respektive 1 för harar, rådjur respektive vargar, ihop med mängden mat i angränsande rutor. Sedan flyttades djuren till nya rutor beroende på hur stor del av den totala mängden mat som fanns i dessa rutor. De ovan nämnda faktorerna togs med för att modellera hur flyttningsbenägna de olika djuren är — hararna är 'hemkära' och rör inte så mycket på sig, medan vargarna är väldigt rörliga. För att uttrycka det mer matematiskt: Om mängden rådjursmat i en ruta  $(i, j)$  betecknas  $m_{i,j}$ , och vi har ett rådjur i ruta  $(k, l)$ , så är sannolikheten  $P_{i,j}^{k,l}$  att det nästa runda skulle befinna sig i

ruta  $(i, j)$  följande:

$$P_{i,j}^{k,l} = \begin{cases} \frac{3m_{k,l}}{3m_{k,l}+m_{k-1,l}+m_{k+1,l}+m_{k,l-1}+m_{1,l+1}} & (i, j) = (k, l) \\ \frac{m_{k-1,l}}{3m_{k,l}+m_{k-1,l}+m_{k+1,l}+m_{k,l-1}+m_{1,l+1}} & (i, j) = (k-1, l) \\ \frac{m_{k+1,l}}{3m_{k,l}+m_{k-1,l}+m_{k+1,l}+m_{k,l-1}+m_{1,l+1}} & (i, j) = (k+1, l) \\ \frac{m_{k,l-1}}{3m_{k,l}+m_{k-1,l}+m_{k+1,l}+m_{k,l-1}+m_{1,l+1}} & (i, j) = (k, l-1) \\ \frac{m_{k,l+1}}{3m_{k,l}+m_{k-1,l}+m_{k+1,l}+m_{k,l-1}+m_{1,l+1}} & (i, j) = (k, l+1) \\ 0 & \text{annars,} \end{cases}$$

där  $m_{i,j} = 0$  om punkten  $(i, j)$  inte är med på 'brädet'.

Situationen är helt analog för harar och vargar, men hararna har faktorn 5 istället för 3 ovan, och vargarna har faktorn 1. Dessutom är mängden tillgänglig mat i varje ruta olika för de tre olika typerna av djur. Vi låter nu  $n_{i,j}$  beteckna antalet rådjur i ruta  $(i, j)$ . Då kan vi sammanfatta ovanstående i en differentialekvation:

$$\begin{aligned} \frac{dn_{i,j}}{dt} = & (P_{i,j}^{i,j} - P_{i-1,j}^{i,j} - P_{i+1,j}^{i,j} - P_{i,j-1}^{i,j} - P_{i,j+1}^{i,j})n_{i,j} + \\ & + P_{i,j}^{i-1,j}n_{i-1,j} + P_{i,j}^{i+1,j}n_{i+1,j} + P_{i,j}^{i,j-1}n_{i,j-1} + P_{i,j}^{i,j+1}n_{i,j+1} \end{aligned}$$

Denna modell applicerades på två olika sätt — dels där djuren flyttade sig helt enligt fördelningen (dvs. om det fanns tio harar i en ruta, och sannolikheten att gå till en annan ruta var 30%, så skulle exakt tre av dem gå till den rutan), och dels en stokastisk, där ett slumpantal togs för varje djur och djuret flyttade sig enligt detta. I den 'deterministiska' modellen trunkeras alla djurförflyttningar, så att endast hela djur flyttar på sig, och om inte ett helt djur ska flytta sig så stannar det kvar.

## 2.2 Förökning och matbehov

Varje ruta modellerades som tidigare nämnts att innehålla en viss mängd vegetabilisk föda. Dessutom så kunde mängden kött på rådjuren och hararna summeras för att få mängden vargamat. Om djurens behov befanns vara större än vad som fanns tillgängligt i en ruta, så dödades de djur som inte maten räckte till utan pardon. En mängd växtätare, motsvarande den mängd kött som vargarna satte i sig, drogs även från den totala mängden djur. Dock modellerades inte att motsvarande gällde mellan växtätare och växter, eftersom de inledande försöken med detta visade ge system där alla djur snabbt dog ut.

Vargarna modellerades att ha ett 'årstidsbehov' av åtta harar, och varje rådjur räknades som två harar. På motsvarande vis modellerades hararna att ha ett behov av en 'växtenhet', och rådjuren ett behov av två 'växtenheter'. För att modellera att vargarna inte är perfekta jägare infördes även en parameter som gjorde att vargarna inte kunde äta upp mer än en tredjedel av alla djur i en ruta.

För att fortfarande kunna använda mängden vegetabilisk föda i ett område som begränsning på antalet växtätare, antogs att dessa inte skulle fortplanta sig om inte mängden tillgänglig mat översteg de vuxna djurens behov multiplicerat med en viss faktor.

Djurens fortplantning modellerades så gott det gick utifrån verkligheten, med ungefärligt rätt årstid och en mängd ungar något under den verkliga kullstorleken. Vargarna modellerades

att föröka sig under våren, då varje varg gav upphov till som mest en vargunge. Även rådjuren modellerades att fortplanta sig under våren, då varje rådjur gav upphov till som mest 1.5 nya rådjur (totala antalet rådjur multiplicerades med 1.5 och rundades av till heltal). Hararna modellerades att fortplanta sig både vår och sommar, och ge upphov till som mest dubbla sitt antal under vardera av dessa årstider.

För att uttrycka detta lite mer matematiskt, kunde man ställa upp tillväxten av djur p.g.a. hunger enligt följande: Låt  $n$  vara antalet djur av en viss typ,  $b$  näringsbehovet för varje individ av denna djurtyp,  $M$  den totala tillgången på föda (för växtätarna berodde denna på hur många av den andra växtätaren som fanns i samma ruta),  $C$  en konstant för att modellera att en viss mängd extra näring krävdes för att få ungar,  $k$  en konstant för att få dimensionen att stämma, samt  $B(t)$  en funktion för att bestämma när på året som ungar föds. Då gäller att

$$\dot{n} = \begin{cases} -k(nb - M) & nb > M \\ 0 & nb < m < Cnb \\ kB(t)(M - Cnb) & M > Cnb. \end{cases}$$

## 2.3 Landskapstyper

Som tidigare nämnts modellerades tre typer av landskap: skog, fält och snårskog. Dessa var olika gynnsamma för de olika djurtyperna.

Fälten modellerades vara väldigt gynnsamma i termer av föda för harar, men betydligt sämre för rådjur. Tillväxten av föda sattes som hög under våren och sommaren, för att sedan snabbt multna bort under vintern.

Snårskogen var en mellantyp, med likvärdig mattillgång för såväl rådjur som harar. Tillväxten var tämligen hög under vår och sommar, och förruttnelsen måttlig under höst och vinter.

Skogen, slutligen, favoriserade rådjuren över hararna i termer av föda. Skogen hade även en tämligen jämn tillväxt/förruttnelse över året.

## 3 Simulering

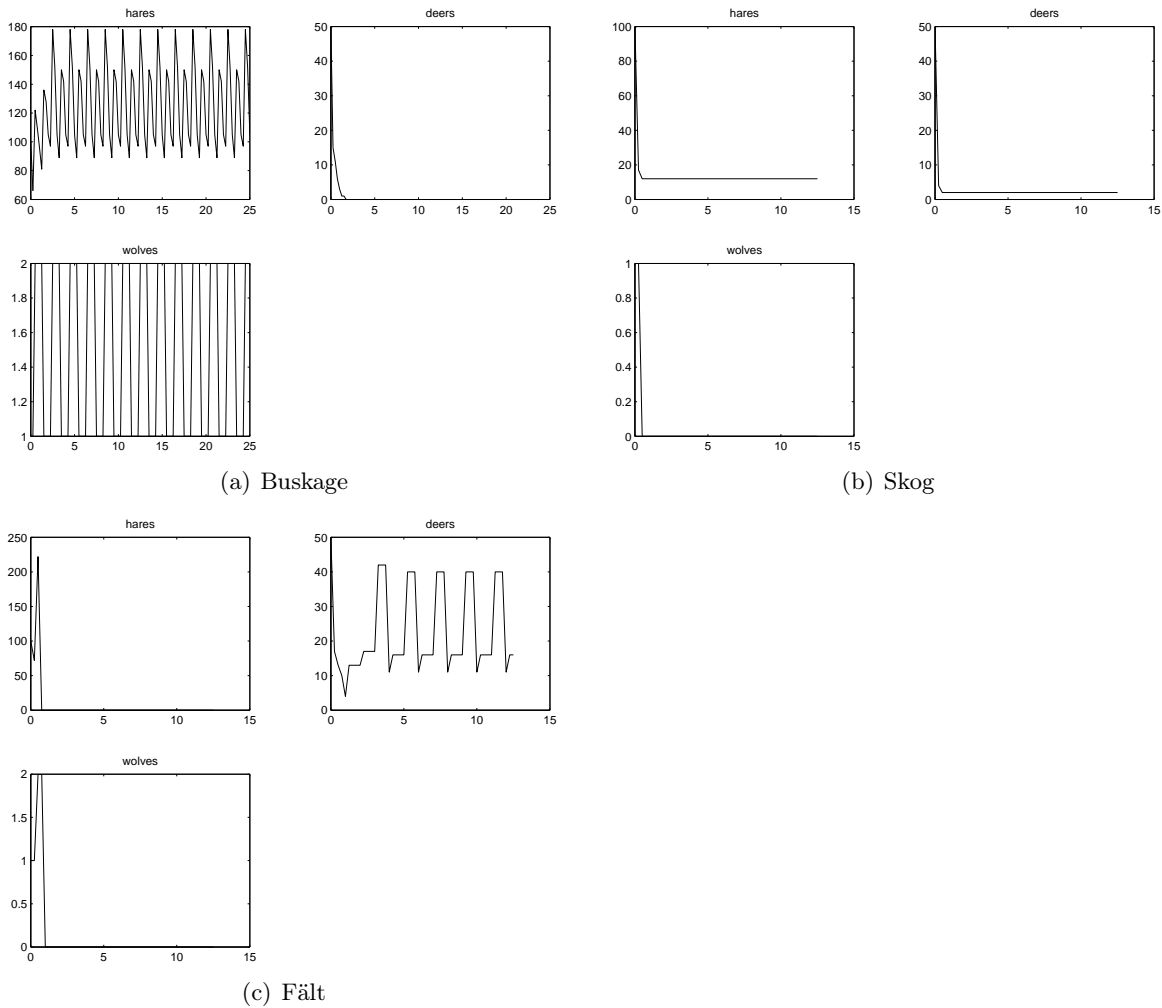
Simuleringen startar i slutet av vintern, så den första fas som går in i är vår. Det gör att djuren har ett år på sig att anpassa sig måttligt till sin miljö innan de utsätts för de svåra påfrestningar som en vinter medför.

Varje simulering utför en serie iterationer över årstiderna. Årstiden växlar mellan varje iteration, eftersom vår modell är tänkt att modellera den förändring som sker under en hel årstid, och inte några stegvisa förändringar under samma årstid.

### 3.1 Initialvärden

För att möjliggöra simuleringar på en ganska många rutor, utan att behöva bygga kartan själva valde vi att skapa kartor slumpmässigt, så att de innehåll lika många rutor av varje landskap. För att kunna göra upprepade simuleringar på samma karta så användes ett frö till slumpvalsgeneratorn för kartgenereringen, som kunde väljas fritt. Samma frö med samma storlek på karta ger samma karta i upprepade försök.

På kartan placerades djur ut i de olika rutorna slumpmässigt. Totalt placerades 100 harar, 50 rådjur och 1.25 vargar ut per ruta.



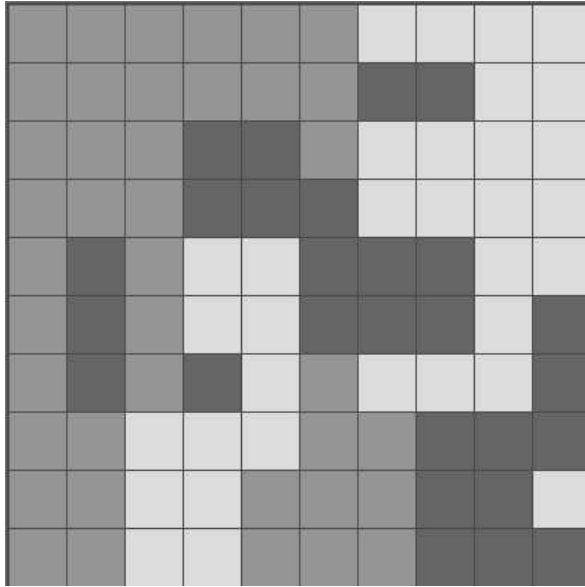
Figur 1: Djuren i olika landskap vid simulering i endast en ruta.

## 4 Resultat

Våra första simuleringar gjordes i en enda ruta. Dessa visade sig ge populationer som snabbt svängde in sig i cykler som märkligt nog varade i två år. I de tre simuleringar som gjordes (en för varje landskapstyp), överlevde aldrig mer än två sorters djur (i ett fall (fälten) överlevde endast rådjuren, vilket var lite märkligt). Resultatet från dessa simuleringar visas i figur 1.

Alla simuleringar på en större karta som vi valt att presentera har gjorts på kartan i figur 2. Det är en kvadratisk karta med 100 rutor. Den har ganska stora sammanhängande områden av samma terrängtyp, vilket gör den lämplig för att studera hur våra djur sprider ut sig.

De första simuleringarna som gjordes med större område än en ruta gjordes utan att modelleringen av ätande inkluderades: djuren rörde sig helt enkelt bara beroende på mängden tillgänglig föda. Denna enkla modell visade sig snabbt ge upphov till tillstånd som rörde sig väldigt cykliskt över året, men som var i hög grad beroende av startfördelningen (se figur 3a-c). Vargarna visade sig speciellt stillastående, medan de båda växtätarna oscillerade mer över åren.



Figur 2: Karta använd för flerrutssimuleringar. De ljusaste rutorna är fält, de mellanmörka är buskage, och de mörka är skog.

När vi härifrån gick över till den mer stokastiska modellen så blev djuren väldigt mycket rörligare. Detta märktes speciellt bland vargarna, som i mycket hög grad koncentrerades i vissa rutor (se figur 3d-f).

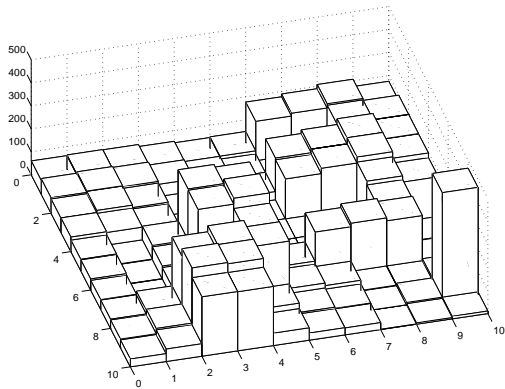
Anledningen till att förändringen var så stor bland vargarna torde vara att med så få vargar, så krävs det en väldigt stor skillnad i mängden föda för att lyckas locka över en 'hel' varg. I den stokastiska modellen skulle vargen i högre grad kunna röra sig om sannolikheterna i närliggande rutor var ungefär lika. De djur som finns i större populationer (harar och rådjur) påverkas mindre av skillnaderna mellan den stokastiska förflyttningen och den deterministiska förflyttningen eftersom centrala gränsvärdesatsen säger att den stokastiska modellen går mot den deterministiska då antalet djur är stort.

Den mer dynamiska modellen, som även inkluderade att djuren var tvungna att faktiskt äta saker, visade sig mer opålitlig. Ibland svängde den snabbt in sig till ett stationärt tillstånd, varefter inte mycket hände, men i vissa simuleringar började vargarna vandra fram och tillbaka över stora områden, vandringar som inte visade någon tendens att dö ut, även om tiden fick gå.

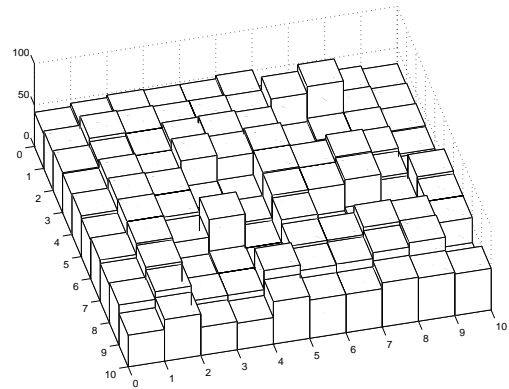
Den stokastiska varianten visade sig vara bättre — speciellt vargarna verkade ha större chanser att överleva, och rörde sig i mönster som i mycket liknade de vandringar som de tidigare gjort.

Slutresultatet från simuleringen med hunger och jakt visas i figur 4. Både ett resultatet från den deterministiska modellen, och ett resultat från den stokastiska modellen visas. I den deterministiskamodellen kunde som sagt resultatet variera rätt mycket beroende på startfördelningen av djuren, medan den stokastiska slutade ungefär på samma sätt även vid upprepade fördelningar.

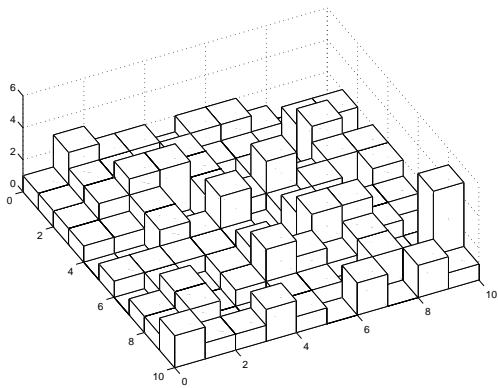
Resultatet från en medelvärdesbildning med 100 simuleringar med 200 iterationer i varje visas i figur 5. Det syns att våra harar främst samlas i snårskogen och på fälten, rådjuren håller till i skogen och till viss del på fälten, och vargarna finns lite överallt, men mest i skog



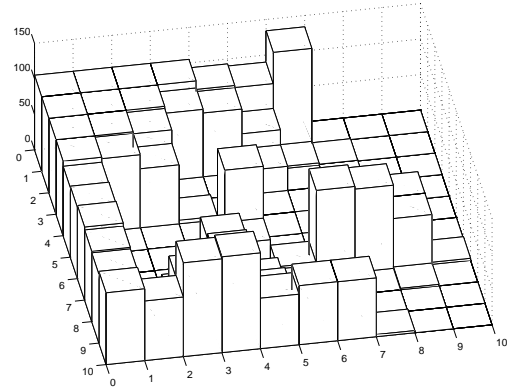
(a) Harar, deterministisk förflyttning



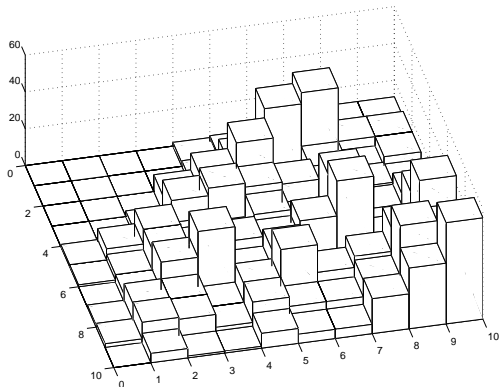
(b) Rådjur, deterministisk förflyttning



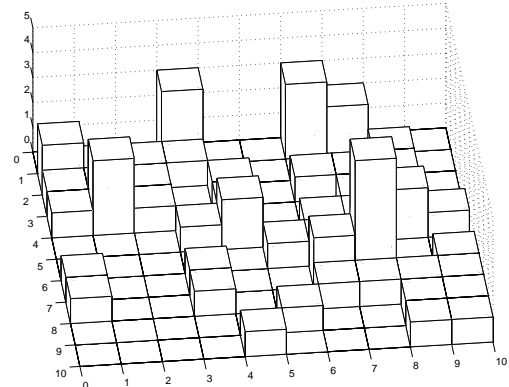
(c) Vargar, deterministisk förflyttning



(d) Harar, stokastisk förflyttning

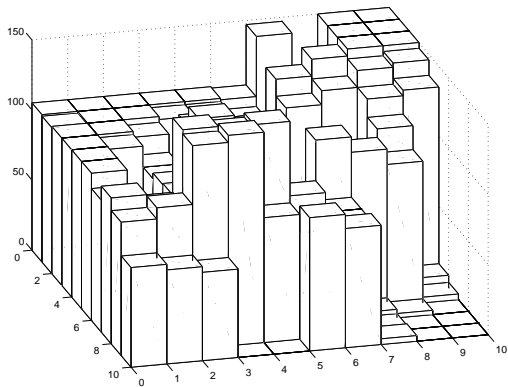


(e) Rådjur, stokastisk förflyttning

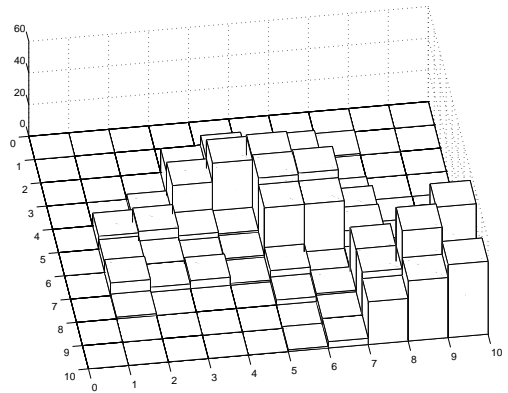


(f) Vargar, stokastisk förflyttning

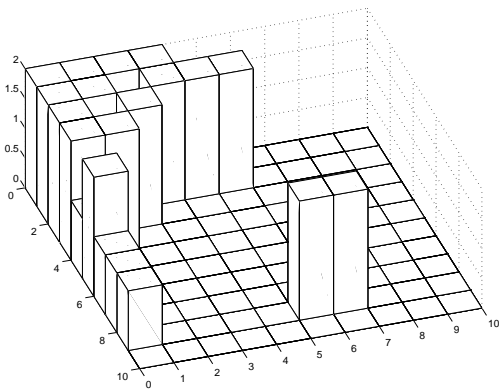
Figur 3: Djurfördelning efter 100 iterationer utan matbehov.



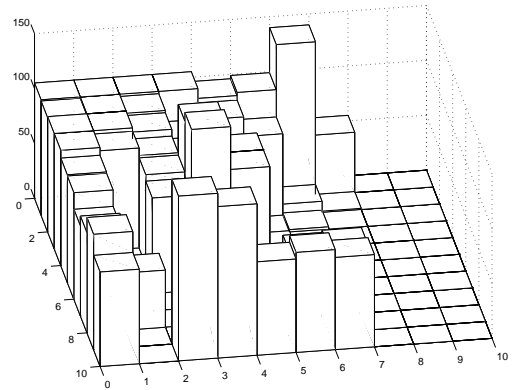
(a) Harar, deterministisk förflyttning



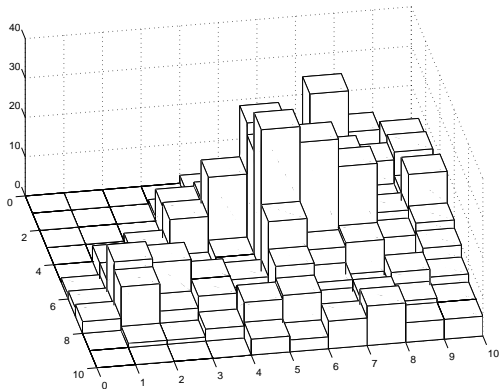
(b) Rådjur, deterministisk förflyttning



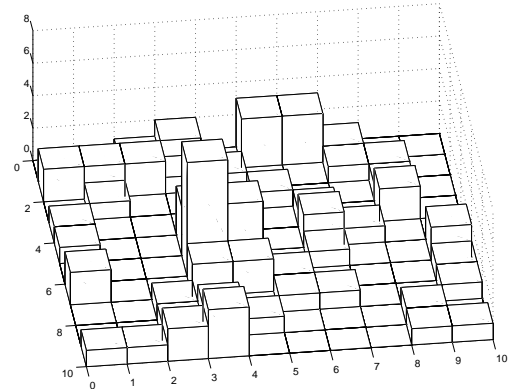
(c) Vargar, deterministisk förflyttning



(d) Harar, stokastisk förflyttning



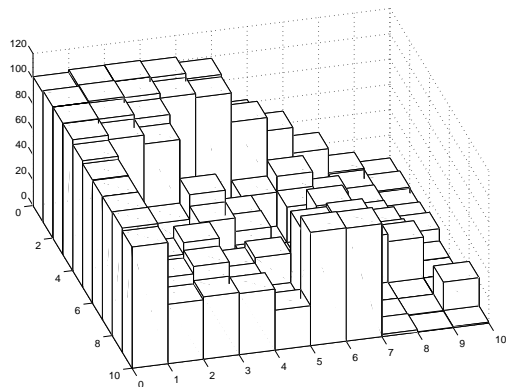
(e) Rådjur, stokastisk förflyttning



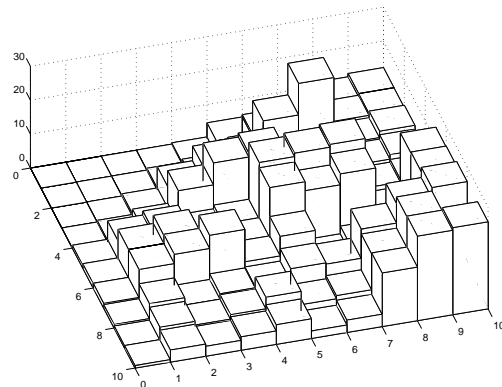
(f) Vargar, stokastisk förflyttning

Figur 4: Djurfördelning efter 100 iterationer med matbehov.

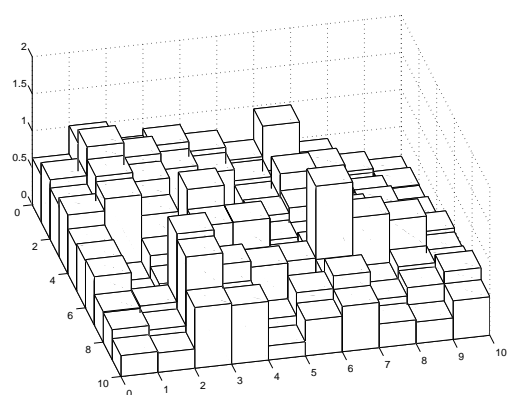




(a) Harar



(b) Rådjur



(c) Vargar

Figur 5: Medelvärde av 100 djurfördelningar efter 200 iterationer med matbehov och stokastisk förflyttning.

och i buskagen.

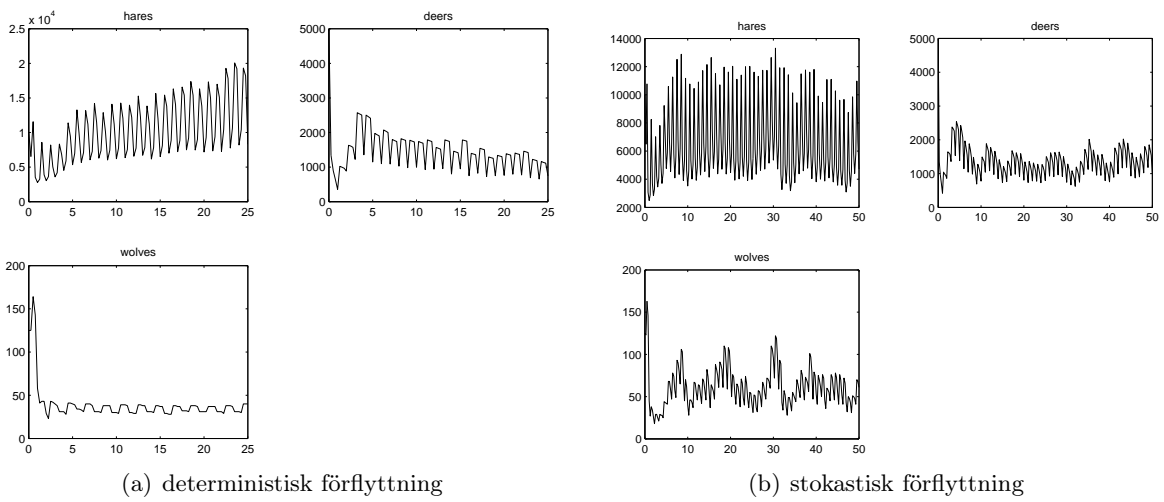
Vi studerade också det totala antalet djur av varje art under en längre simulering. Värt att notera är att med våra startvärden så sker först en rejäl dipp av antalet växtätare, medan vargarna växte till sig lite grann. När antalet växtätare har sjunkit långt under startvärdena så faller även antalet vargar mot en minimumnivå. Växtätarna växer därefter till sig igen, och då återhämtar sig även vargarna. Figur 6 visar hur djuren betar sig de 100 första iterationerna; både stokastiskt och deterministiskt.

Vargarna och rådjuren återhämtar sig till nivåer en bra bit under deras initialvärden, medan hararna placerar sig närmare begynnelseantalet.

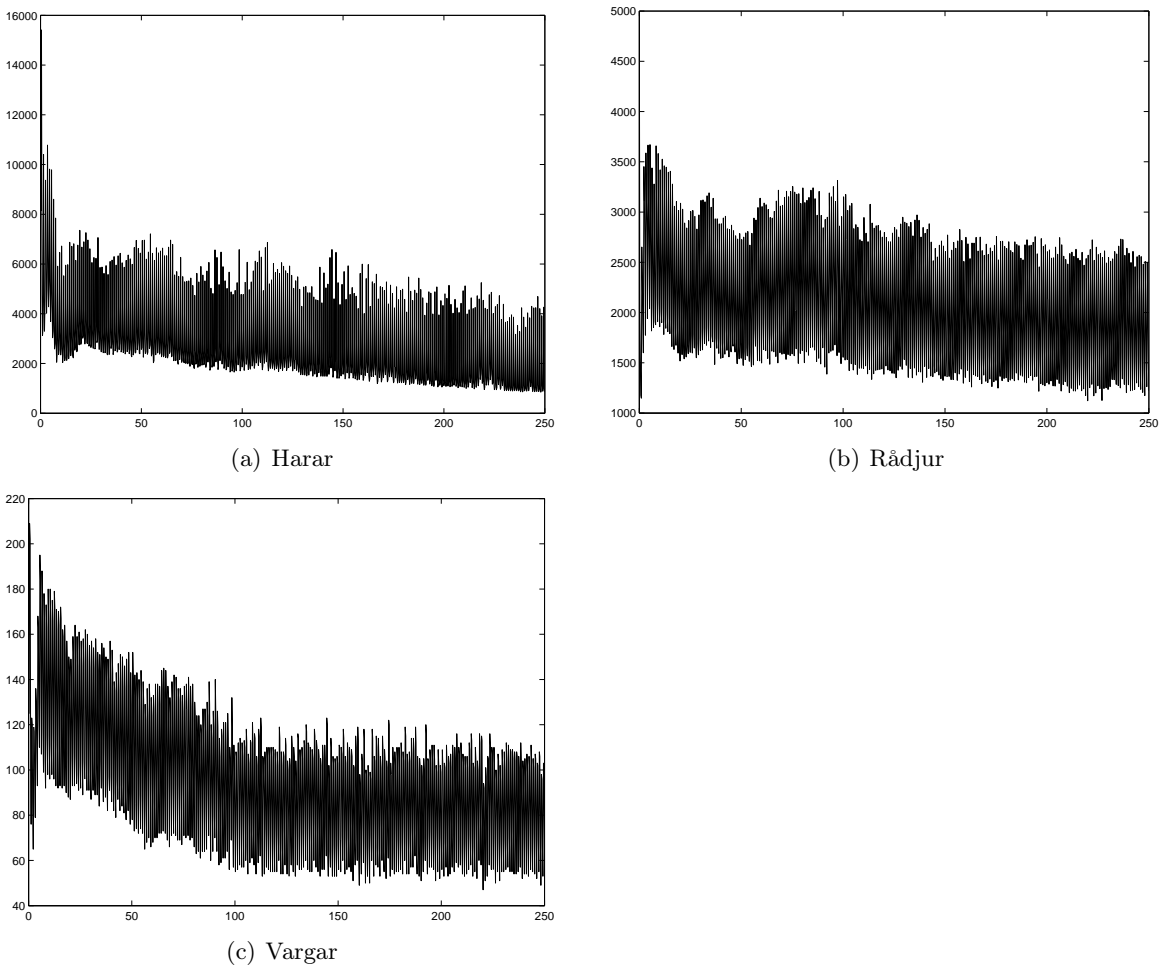
Vid riktigt långa simuleringar ställer djuren in sig i ett ganska cykliskt beteende över årstiderna med vissa variationer i max- och minvärden mellan åren. Figur 7 visar de olika djuren under 1000 iterationer med stokastisk modell.

Fasporträtt för de olika djuren i förhållande till varandra under dessa 1000 iterationer visas i figur 8 och 9.

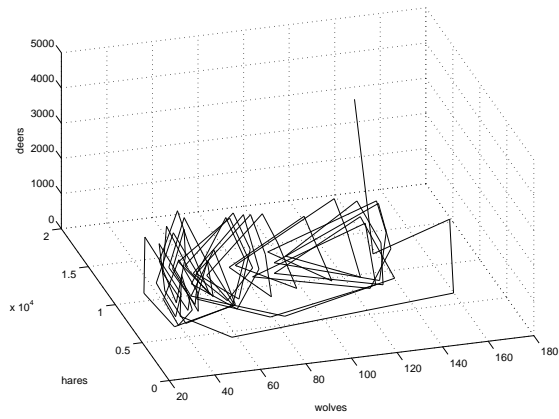
Efter att ha sett hur våra initialvärden snabbt rubbas gjorde vi en ny simulering med 1000 iterationer, denna gång med 1 varg, 30 rådjur och 60 harar per ruta som startvärde.



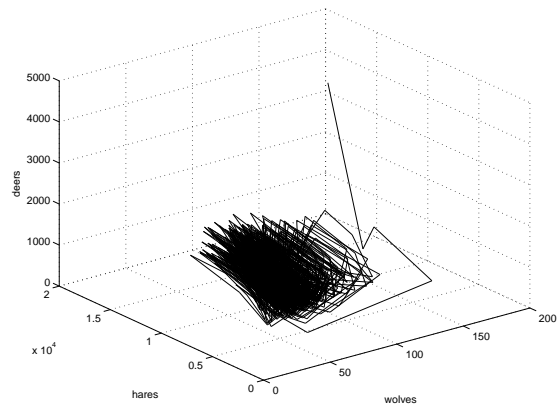
Figur 6: Totala antalet djur över tiden, 100 iterationer



Figur 7: Totala antalet djur av olika typer över tiden under en simulering med stokastiska förflyttningar och ätande djur. 1000 iterationer.

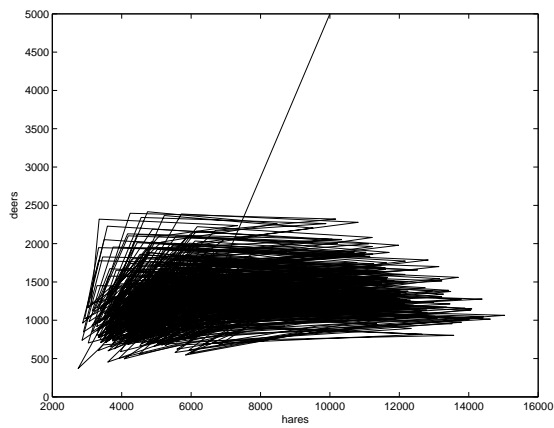


(a) 100 iterationer

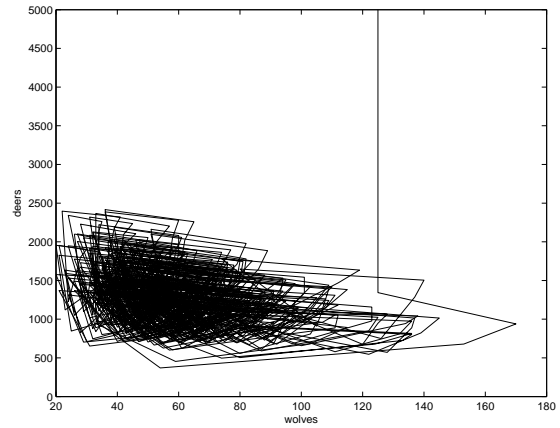


(b) 1000 iterationer

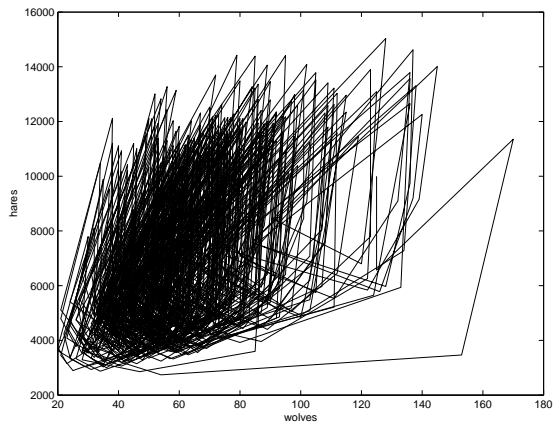
Figur 8: 3d-fasporträtt för simulering med stokastiska förflyttningar och ätande djur.



(a) Harar mot rådjur



(b) Vargar mot rådjur

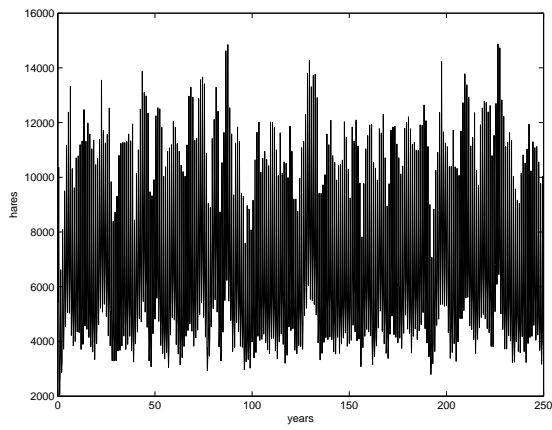


(c) Vargar mot harar

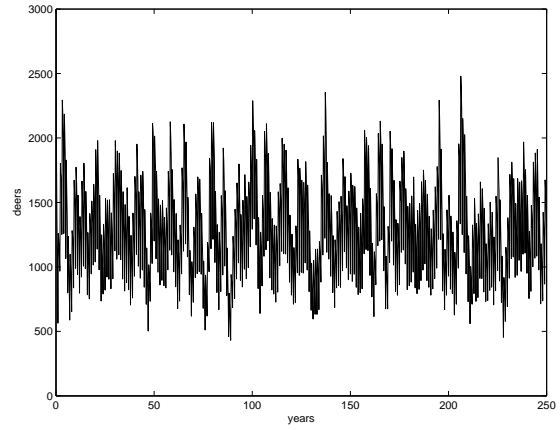
Figur 9: Fasporträtt för 1000 iterationer med stokastiska förflyttningar och hungermodellen aktiverad.

Resultatet blev väldigt likt det tidigare och finns återgivet i figur 10 och 12. Om vi sänkte initialpopulationerna ytterligare, till en varg per två rutor och tio rådjur och 20 harar per ruta så håller sig fortfarande populationen efter lång tid inom samma område i fasporträtten, vilket framgår av figur 11 och 13.

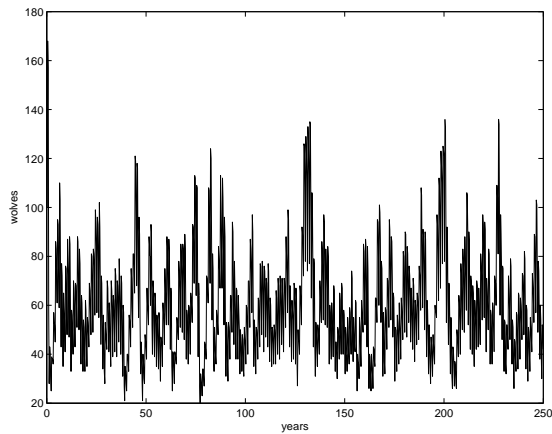
Stör vi populationerna ytterligare, och låter initialpopulationen vara två harar, 50 rådjur och 20 vargar per ruta så ligger vi på gränsen för vad vår modell klarar av att stabilisera. Figur 14 visar en körning som stabiliserar sig mot samma typ av variationer som tidigare. Men andra körningar med samma antal djur från början, men fördelade annorlunda kan en eller flera arter dö ut i. Rådjuren överlever alltid eftersom de är många. Figur 15 visar en simulering där alla harar dog, och figur 16 visar en simulering i vilken endast rådjuren överlevde. Dessa tre simuleringar finns även återgivna i 3d-fasporträtt i figur 17.



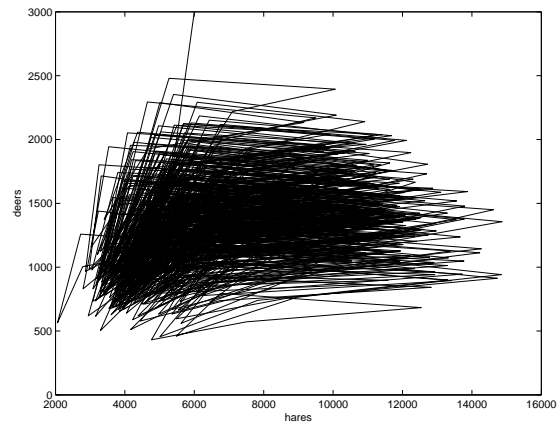
(a) Harar



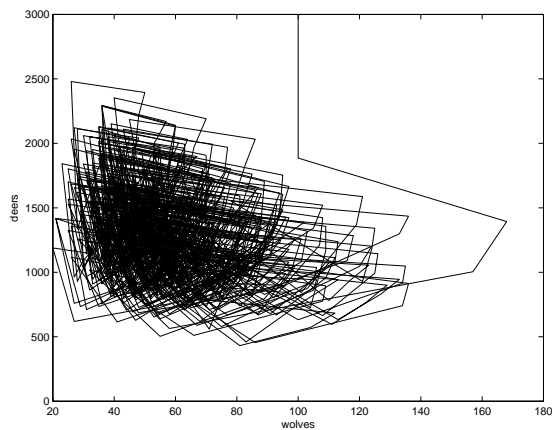
(b) Rådjur



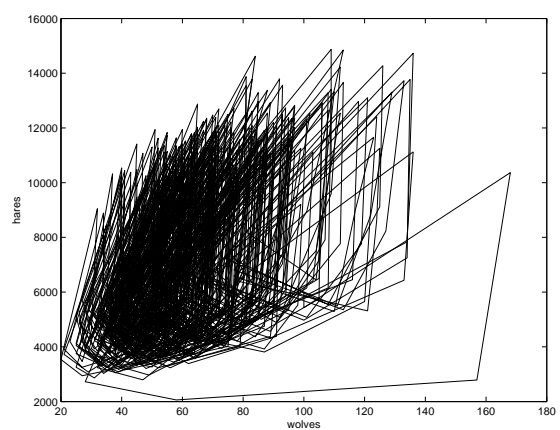
(c) Vargar



(d) Harar mot rådjur

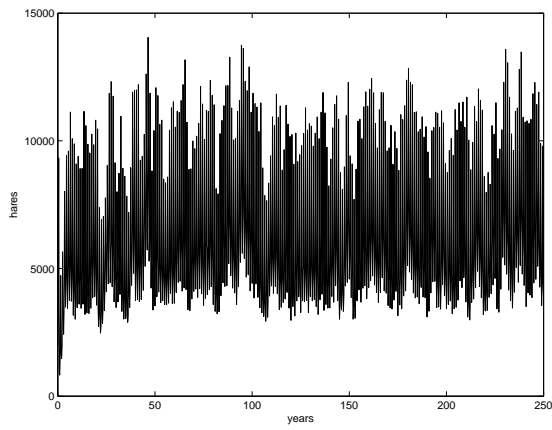


(e) Vargar mot rådjur

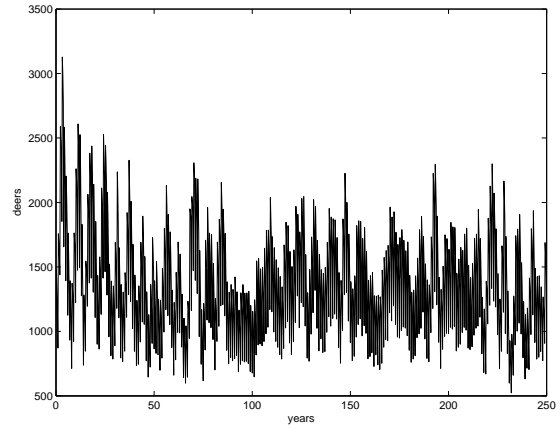


(f) Vargar mot harar

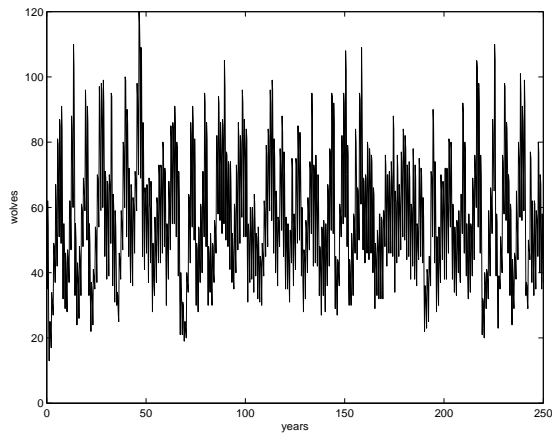
Figur 10: 1000 iterationer med stokastiska förflyttningar och hungermodellen aktiverad. Minskad initialpopulation (1 varg, 30 rådjur och 60 harar per ruta).



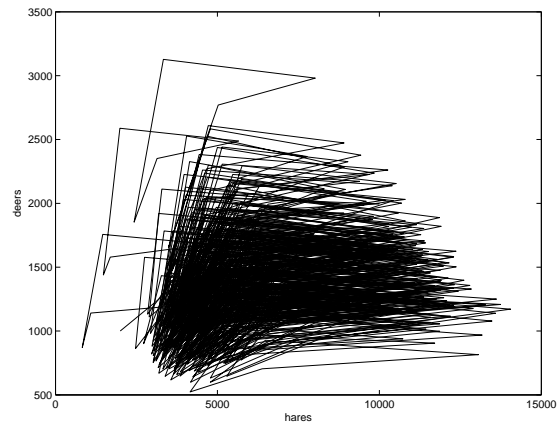
(a) Harar



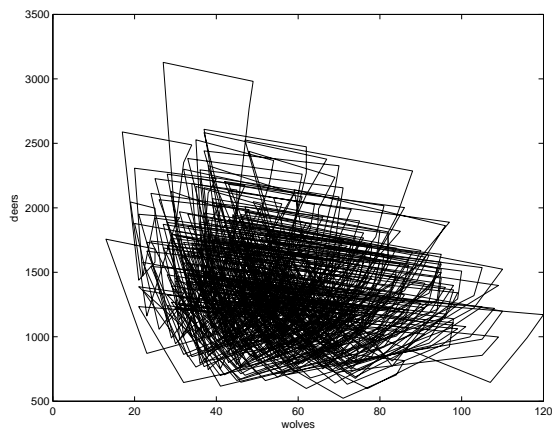
(b) Rådjur



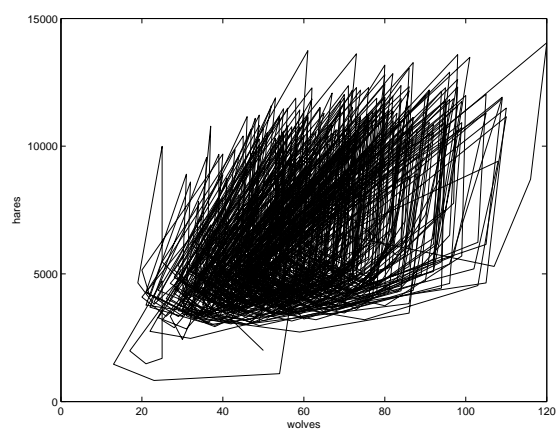
(c) Vargar



(d) Harar mot rådjur

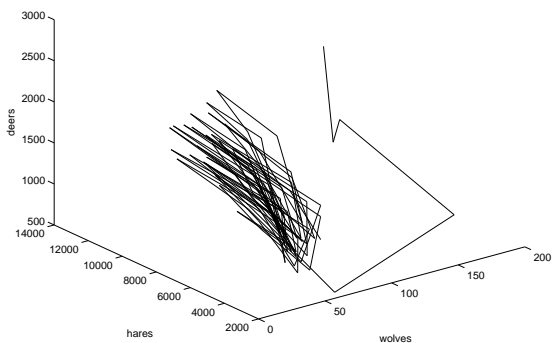


(e) Vargar mot rådjur

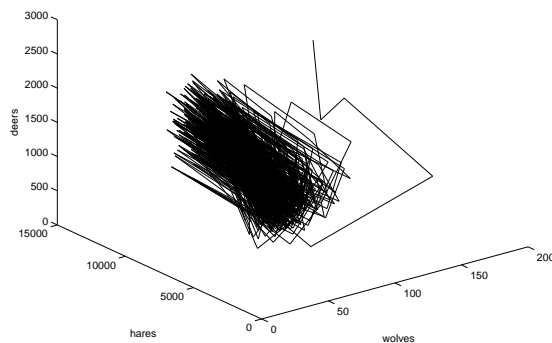


(f) Vargar mot harar

Figur 11: 1000 iterationer med stokastiska förflyttningar och hungermodellen aktiverad. Ytterligare sänkt initialpopulation (1 varg per två rutor, samt 10 rådjur och 20 harar per ruta).

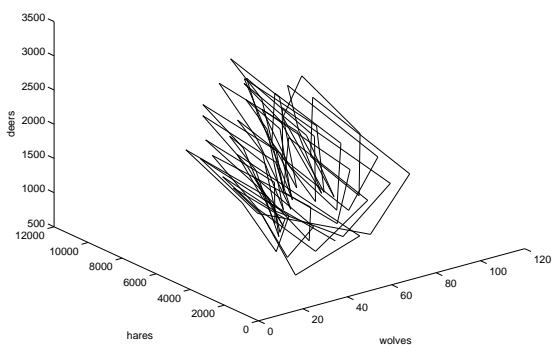


(a) 100 iterationer

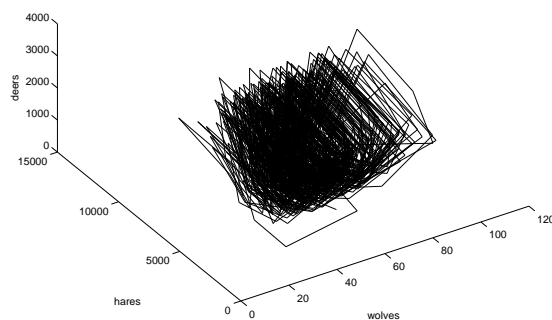


(b) 1000 iterationer

Figur 12: 3d-fasporträtt för simulering med stokastiska förflyttningar och ätande djur. Minskad initialpopulation (1 varg, 30 rådjur och 60 harar per ruta).

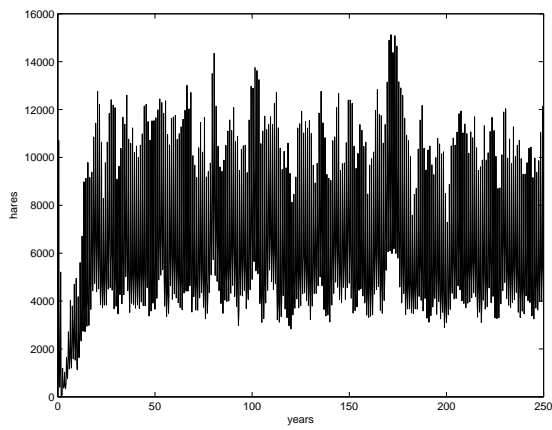


(a) 100 iterationer

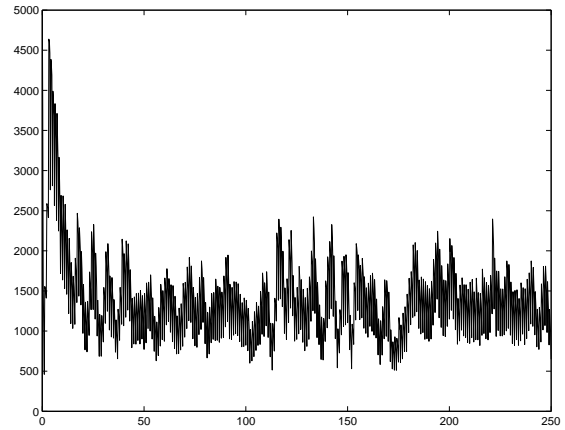


(b) 1000 iterationer

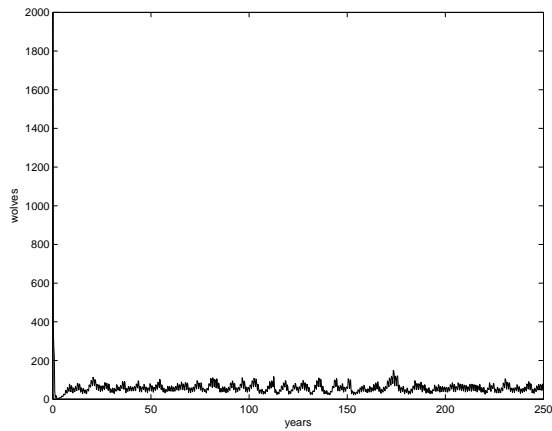
Figur 13: 3d-fasporträtt för simulering med stokastiska förflyttningar och ätande djur. Ytterligare minskad initialpopulation (1 varg per två rutor, samt 10 rådjur och 20 harar per ruta).



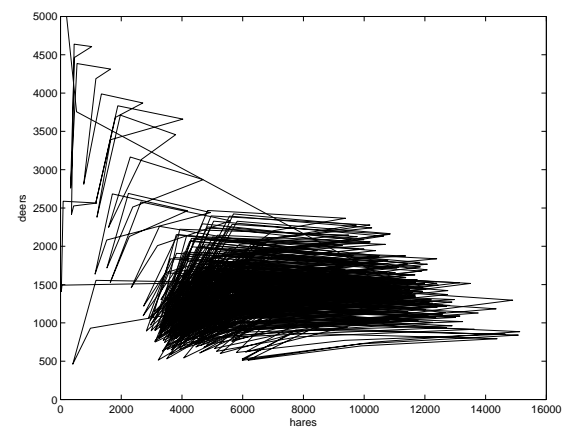
(a) Harar



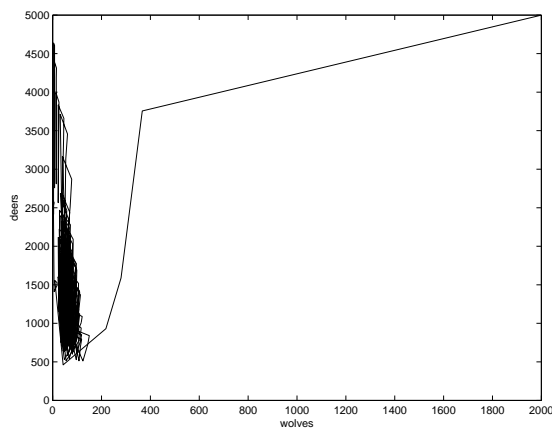
(b) Rådjur



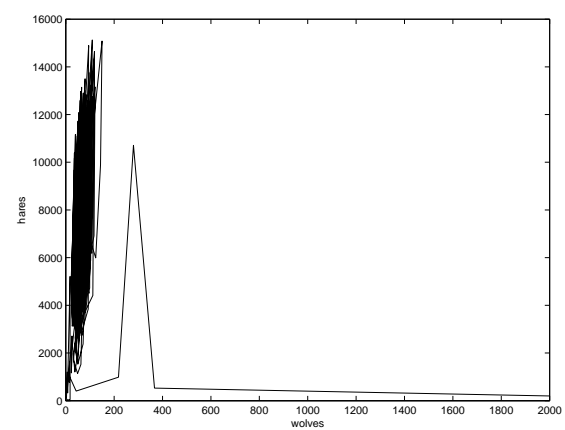
(c) Vargar



(d) Harar mot rådjur



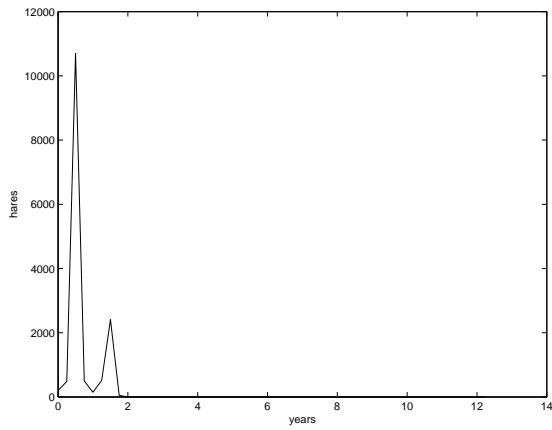
(e) Vargar mot rådjur



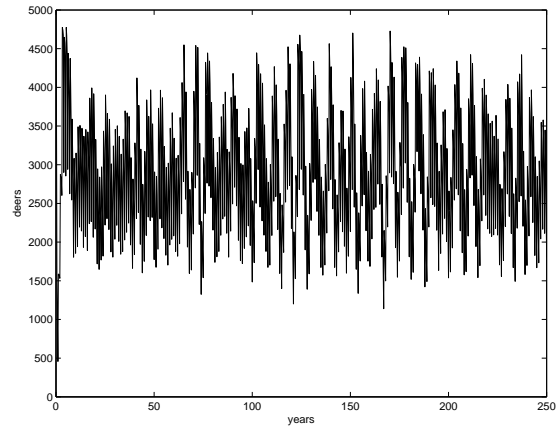
(f) Vargar mot harar

Figur 14: 1000 iterationer med stokastiska förflyttningar och hungermodellen aktiverad. Initialpopulationen mycket störd (20 vargar, 50 rådjur och två harar per ruta). Simulering 1.

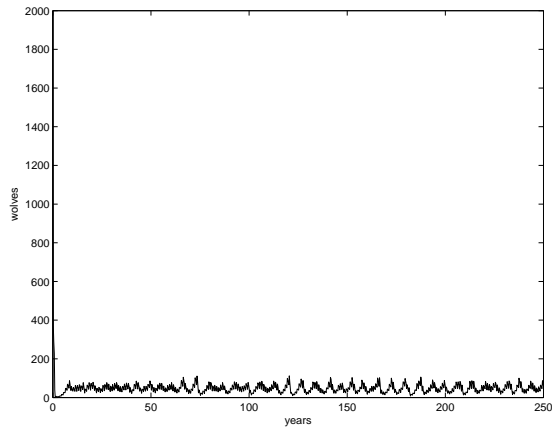




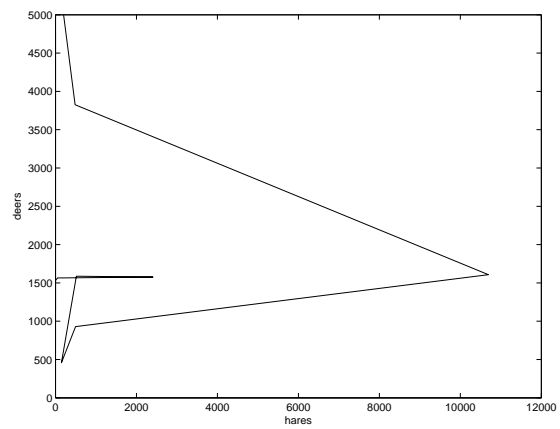
(a) Harar



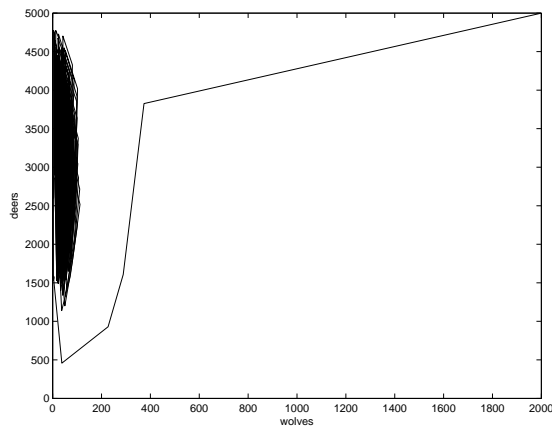
(b) Rådjur



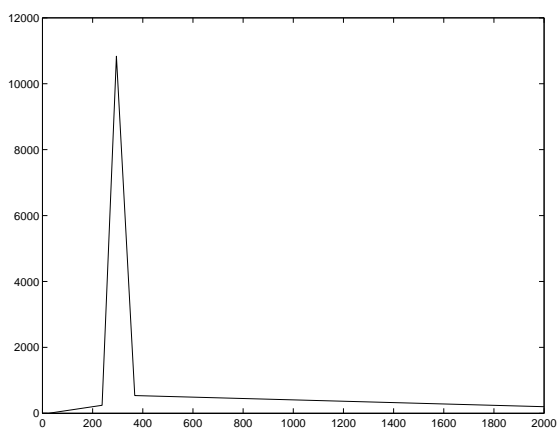
(c) Vargar



(d) Harar mot rådjur

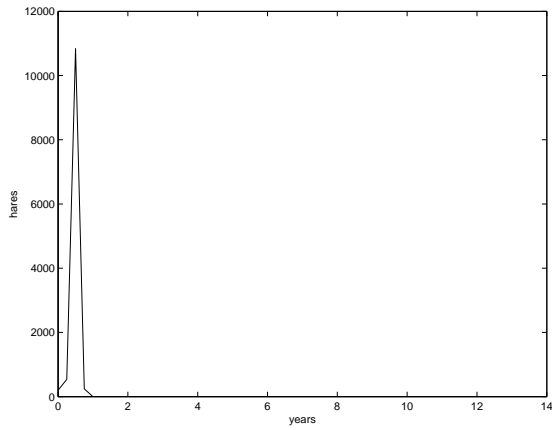


(e) Vargar mot rådjur

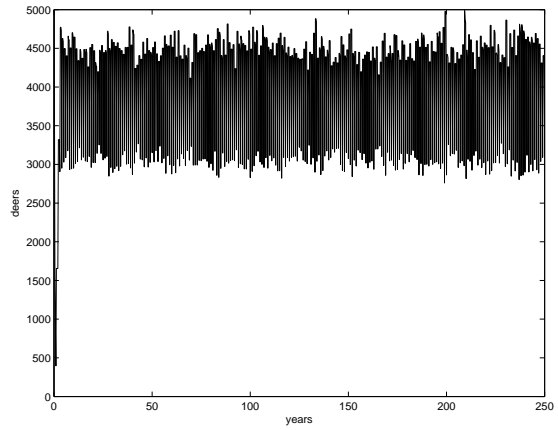


(f) Vargar mot harar

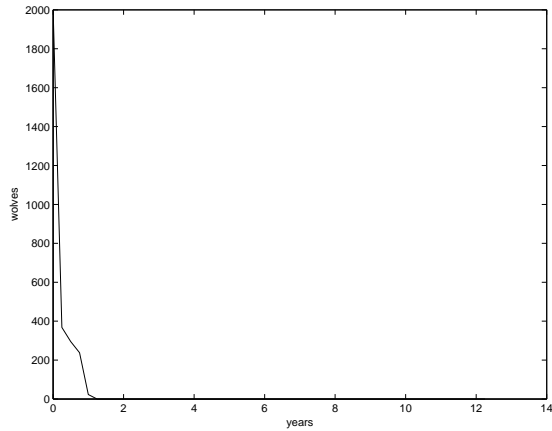
Figur 15: 1000 iterationer med stokastiska förflyttningar och hungermodellen aktiverad. Initialpopulationen mycket störd (20 vargar, 50 rådjur och två harar per ruta). Simulering 2.



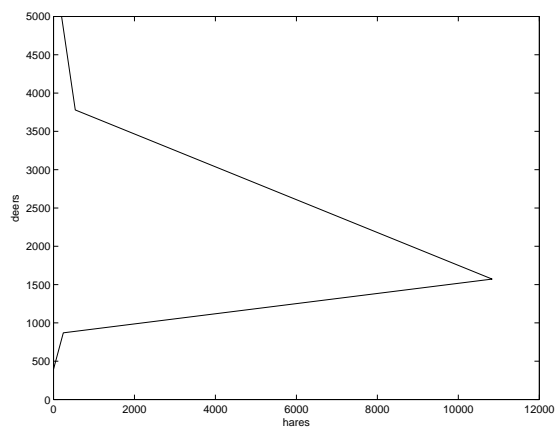
(a) Harar



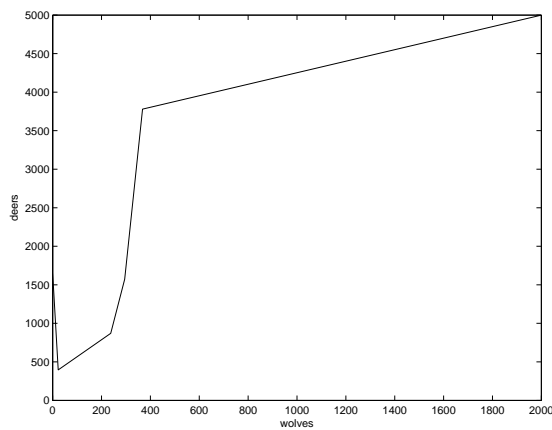
(b) Rådjur



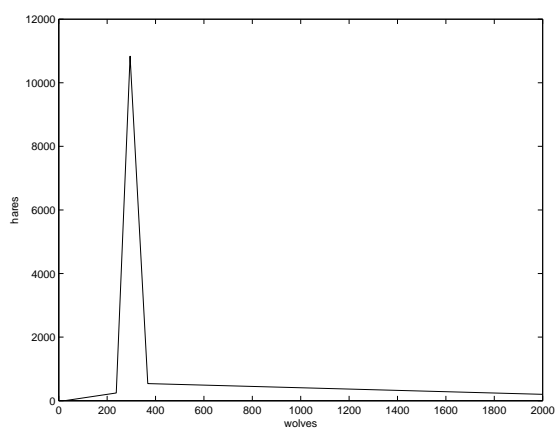
(c) Vargar



(d) Harar mot rådjur

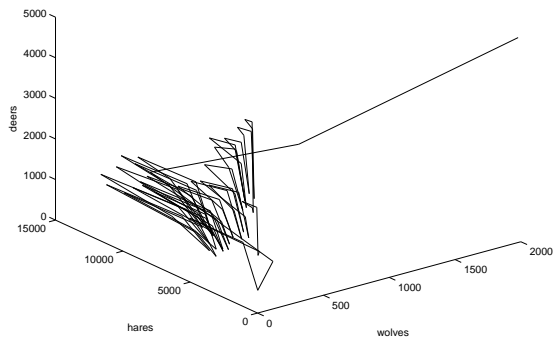


(e) Vargar mot rådjur

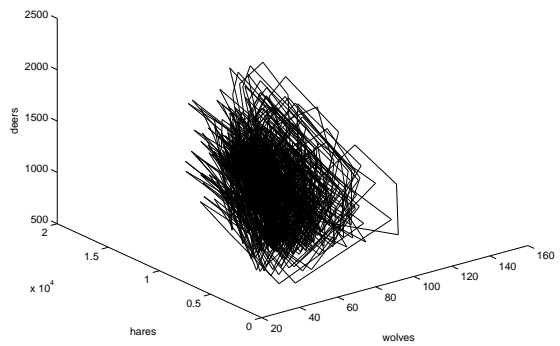


(f) Vargar mot harar

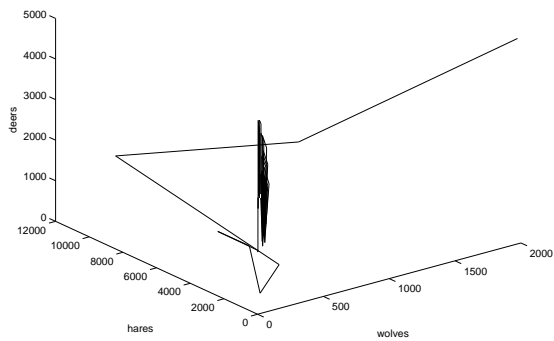
Figur 16: 1000 iterationer med stokastiska förflyttningar och hungermodellen aktiverad. Initialpopulationen mycket störd (20 vargar, 50 rådjur och två harar per ruta). Simulering 3.



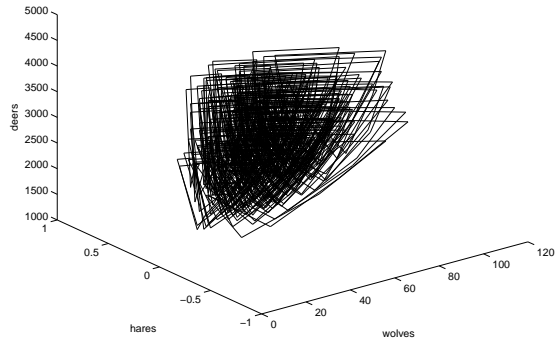
(a) Simulering 1: Se första 100 iterationerna.



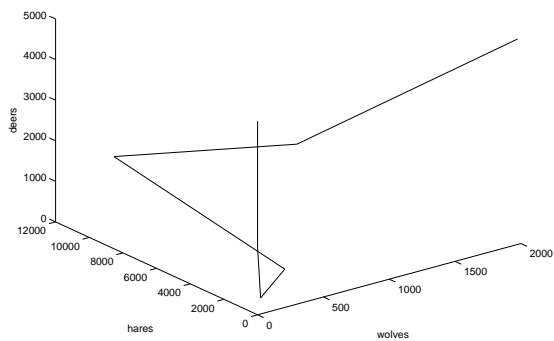
(b) Simulering 1: Iteration 101-1000



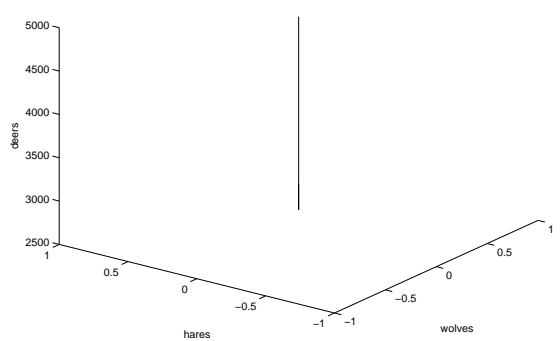
(c) Simulering 2: De första 100 iterationerna



(d) Simulering 2: Iteration 101-1000



(e) Simulering 3: De första 100 iterationerna



(f) Simulering 3: Iteration 101-1000

Figur 17: 3d-fasporträtt för simulering med stokastiska förflyttningar och ätande djur. Extra störd initialpopulation (20 vargar, 50 rådjur och två harar per ruta)