Chalmers Tekniska Högskola

Tentamen i Matematisk analys i en variabel, del B, för M1 och TD1,
20000418, kl 08.45 – 12.45.

Salar: ? **Kurs:** TMA081 del B
Hjälpmedel: Alla hjälpmedel är tillåtna. Valfri räknare, läroböcker, anteckningar mm. Dock ej dator.
Telefon: Jakob Hultén 0740-459022
OBS! Denna tenta skall göras av årets studenter samt av de som är inskrivna 98 eller tidigare och **har** deltagit i årets kontinuerliga examination.
Enbart svar till en uppgift ger inga poäng, fullständig lösning krävs alltid.
För godkänt på tentamen krävs minst 15 poäng.
OBS! Skriv linje, inskrivningsår, namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Skriv personnummer på samtliga inlämnade blad. Sortera uppgifterna i ordning och numrera sedan bladen löpande.

1. En kropp med massan m är rörlig längs en horisontell linje. Kroppen är fästad vid en vägg via en fjäder med fjäderkonstant k och en dämpare med dämpkoefficient c. Kroppens avvikelse $x(t)$ från jämviktsläget är då lösning till differentialekvationen

   $x'' + cx' + kx = f(t)$ där $f(t)$ är en drivande kraft.

   Låt $c = 4,\ k = 4$ och $f(t) = \sin(2t)$.

   (a) Bestäm $x(t)$ om $x(0) = x'(0) = 0$ (3p)

   (b) Vad händer om dämparen är trasig så att $c = 0$? (3p)

2. Låt D vara ett område i xy-planet och P en punkt vars z-koordinat z_0 är positiv. Den kropp som erhålls då vi förbinder alla punkter i D med punkten P kallar vi för konen eller pyramiden med bas D och topp P. Om densiteten i konen endast beror av avståndet till basen, dvs om $\rho = \rho(z)$ så ger skivformeln att konens massa är $M = \displaystyle\int_0^{z_0} \rho(z)A(z)dz$ där $A(z)$ är arean av skivan på höjden z.

   Antag att $A(0) = A_0$ och att $\rho(z) = \dfrac{z_0}{(z_0+z)^2}$.

   (a) Bestäm konens massa. (3p)

   (b) Bestäm avståndet från konens masscentrum till xy-planet. (3p)

3. Kraftlinjerna till ett kraftfält $(p(x,y), q(x,y))$ är kurvskaran vars tangentvektorer är parallella med vektorerna $(p(x,y), q(x,y))$. Detta innebär att kurvskarans differentialekvation är $y' = \dfrac{q(x,y)}{p(x,y)}$.
   Om en partikel rör sig längs en kraftlinje i fältets riktning så uträttar kraftfältet hela tiden ett positivt arbete på partikeln.

   Om en partikel följer en kurva i den ortogonala kurvskaran så kommer kraftfältet inte att uträtta något arbete på partikeln.

   Bestäm såväl kraftlinjer som den ortogonala kurvskaran till kraftfältet $\left(\dfrac{4y}{x^2+16y^2}, \dfrac{-x}{x^2+16y^2}\right)$. (6p)

4. För en talföljd y_n där $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$, gäller att $y_0 = 30001$ och $y_1 = 59997$. Dessutom gäller, om vi sätter $z_n = y_{n+1} + y_n$, att $z_{n+1} = 2^n 450000 - 3z_n$ för $n \geq 0$. Bestäm minsta värdet på n sådant att $y_n < 0$. (6p)

5. (a) En integral $\displaystyle\int_{-h}^{h} f(x)dx$ kan approximeras med hjälp av mittpunktsformeln. Man får då

   $\displaystyle\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx 2hf(0).$

   Bevisa att felet i denna approximation är högst Mh^2 om $|f'(x)| \leq M$ då $|x| \leq h$.
   Vilka övriga förutsättningar måste gälla? (3p)

   (b) Låt $A(t)$ beteckna arean av området $\{(x,y); x \leq t,\ 0 \leq y \leq e^{-x^2}\}$.
   Visa att $f(x) = e^{-x}A(x)$ är lösning till differentialekvationen $y' + y = e^{-x^2-x}$
   Vad stöder du dig på i ditt bevis? (3p)

Lycka till!
Carl-Henrik