CHALMERS | GÖTEBORGS UNIVERSITET

Matematiska institutionen
Carl-Henrik Fant

14 november 2000

# 1 System av differentialekvationer.

Vi skall här undersöka ett par olika lösningsmetoder för system av differentialekvationer, dels eliminationsmetoden, dels matrismetoder. Vi skall se att varje differentialekvation, eller system av ekvationer, kan göras om til ett system av 1:a ordningens ekvationer. Alla frågor om lösbarhet och entydighet för lösningar till differentialekvationer kan därför reduceras till lösbarhet och entydighet för lösningar till system av 1:a ordningens differentialekvationer. Vi avslutar med att ge enkla versioner av satser som besvarar dessa frågor.

## 1.1 Eliminationsmetoden

Metoden illustreras med exempel och kommentarer.

**Exempel 1:** Antag att funktionerna $x(t)$ och $y(t)$ satisfierar följande system av differentialekvationer.

$$\begin{cases} x' + x - 2y' + y & = & t \\ 2x' + 5x - y' + 5y & = & t^2 \end{cases}$$

Vi kan här succesivt eliminera så att vi får en differentialekvation som endast innehåller $y$ och derivator av $y$ samt $t$ och en där funktionen $x$ också finns med. De tillåtna operationerna är nu dels de vanliga från algebran, dels derivering av ekvationer. Vi skall emellertid se till att vi i varje steg har ett system som är ekvivalent med det ursprungliga.
I första steget subtraherar vi 2*ekv(1) från ekv(2) för att eliminera $x'$. En sådan operation ger alltid ett ekvivalent system.

$$\begin{cases} x' + x - 2y' + y & = & t \\ 3x + 3y' + 3y & = & t^2 - 2t \end{cases}$$

Genom att derivera den undre ekvationen kan vi sedan eliminera $x'$ ur den övre. För att kalkylerna skall vara enkla att följa flyttar jag upp ekv(2) och tar med den deriverade ekvationen så att ekvivalensen blir uppenbar. Här har vi ju bara lagt till en ekvation och kan därför inte få fler lösningar till det utökade systemet än till det ursprungliga. Vi kan inte heller förlora några lösningar eftersom alla funktioner $x(t)$ och $y(t)$ som satisfierar en viss ekvation också måste satisfiera den deriverade ekvationen. Jag multiplicerar också ekv(1) med 3.

$$\begin{cases} 3x + 3y' + 3y & = & t^2 - 2t \\ 3x' + 3y'' + 3y' & = & 2t - 2 \\ 3x' + 3x - 6y' + 3y & = & 3t \end{cases}$$

Subtrahera ekvation (2) från ekv (3) så får vi

$$\begin{cases} 3x + 3y' + 3y & = & t^2 - 2t \\ 3x' + 3y'' + 3y' & = & 2t - 2 \\ 3x - 3y'' - 9y' + 3y & = & 3t - (2t - 2) \end{cases}$$

Nu behöver vi inte längre den deriverade ekvationen och utelämnar därför den.

$$\begin{cases} 3x + 3y' + 3y & = & t^2 - 2t \\ 3x - 3y'' - 9y' + 3y & = & t + 2 \end{cases}$$

Vi kan nu eliminera $x$ ur den sista ekvationen genom att subtrahera den första.

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} x + y' + y & = & \frac{1}{3}(t^2 - 2t) \\ -3y'' - 12y' & = & t + 2 - (t^2 - 2t) \end{cases}$$

Den undre ekvationen $y'' + 4y' = \dfrac{1}{3}(t^2 - 3t - 2)$ har lösningen

$y(t) = C_1 e^{-4t} + C_2 + \dfrac{1}{36}t^3 - \dfrac{7}{48}t^2 - \dfrac{3}{32}t)$

Insättning av detta i den övre ekvationen ger

$x(t) = 3C_1 e^{-4t} - C_2 - \dfrac{1}{36}t^3 + \dfrac{19}{48}t^2 - \dfrac{9}{32}t + \dfrac{3}{32}.$

Eftersom vi hela tiden arbetat med ekvivalenta ekvationssystem så vet vi att vi nu har funnit allmänna lösningen till det ursprungliga systemet.

□

Tekniken fungerar lika bra om ekvationerna har högre ordning.

**Exempel 2:** Vi löser ekvationssystemet

$$\begin{cases} x'' - 2x + y' &= 0 \\ 2x' - y'' - y &= 0 \end{cases}$$

Här ser det enklast ut att eliminera $y''$ i stället för $x''$. Vi deriverar ekv(1) och adderar resultatet till ekv(2). Jag utelämnar här den deriverade ekvationen eftersom kalkylerna är relativt enkla. Vi får nu:

$$\begin{cases} x'' - 2x + y' &= 0 \\ x''' - y &= 0 \end{cases}$$

Derivera nu ekv(2) och addera till ekv(1) så erhålls:

$$\begin{cases} x^{(4)} + x'' - 2x &= 0 \\ y &= x''' \end{cases}$$

Lösningen får vi nu till

$$\begin{cases} x(t) &= C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3\cos(\sqrt{2}t) + C_4\sin(\sqrt{2}t) \\ y(t) &= C_1e^t - C_2e^{-t} + 2\sqrt{2}(C_3\sin(\sqrt{2}t) - C_4\cos(\sqrt{2}t))) \end{cases}$$

□

Det är inte alltid möjligt att eliminera så att den ena ekvationen är en differentialekvation med en obekant, tex $y(t)$, och den andra uttrycker $x(t)$ direkt med derivator av $y(t)$.

**Exempel 3:** Vi löser

$$\begin{cases} x' + x - 3y'' + 6y' &= 0 \\ 2x'' + 2x' + y' - 2y &= 0 \end{cases}$$

Om vi här eliminerar $x''$ ur ekv(2) så försvinner samtidigt $x'$ och vi får

$$\begin{cases} x' + x - 3y'' + 6y' &= 0 \\ 6y''' - 12y'' - y' + 2y &= 0 \end{cases}$$

Här bestämmer vi lätt $y(t)$ ur ekv(2) och får sedan en ny differentialekvation att lösa för att bestämma $x(t)$. Om vi istället från början hade eliminerat $y''$ ur ekv(1) så hade vi fått ekvationssystemet

$$\begin{cases} 6x''' + 6x'' + x' + x &= 0 \\ y' - 2y &= -2x'' - 2x \end{cases}$$

□

Denna teknik fungerar i princip även om ekvationerna inte är linjära med konstanta koefficienter men blir givetvis mer komplicerade då.

## 1.2 Matrismetoder.

Vi skall här titta på matrismetoder för system av första ordningens linjära differentialekvationer med konstanta koeficienter. Det första vi skall göra är att se hur högre ordningens (system av) ekvationer kan skrivas om till (större) system av första ordningens ekvationer.

### 1.2.1 Omskrivning av differentialekvationer till första ordningens system.

Idén är enkel: Inför nya obekanta funktioner för de olika derivatorna utom den högsta.

**Exempel 4:** Ekvationen $y^{(4)} + 2y''' - y'' + 3y' + y = \sin(t)$ ger ett första ordningens ekvationssystem om vi sätter $y' = z, \quad y'' = z' = u, \quad y''' = u' = v$. Då är ju $v' = y^{(4)}$ och vi får systemet

$$\begin{cases} v' &= \sin(t) - 2v + u - 3z - y \\ u' &= v \\ z' &= u \\ y' &= z \end{cases}$$

□

På samma sätt kan vi skriva om ett system till ett större system.

**Exempel 5:**

$$\begin{cases} x'' - 2x + y' &= 0 \\ 2x' - y'' - y &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z' &= 2x - u \\ u' &= 2z - y \\ x' &= z \\ y' &= u \end{cases}$$

□

Här kan man ju få ekvationer där vänsterledet innehåller flera derivator exvis både $u'$ och $z'$. I allmänhet kan man då eliminera så att ekvationssystemet kan skrivas

$$\begin{cases} x_1'(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n'(t) &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) \end{cases}$$

På matrisform:

(B) $\quad \boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$

Denna omskrivning fungerar för de flesta system av homogena differentialekvationer. Omvänt kan de flesta system (B) skrivas om med eliminationsmetoden till ett triangulerat system av samma typ som system (A) ovan.

### 1.2.2 Egenvektormetoden.

Detta avsnitt kan göras mer systematiskt om man läst kapitel 10 i G Sparr: Linjär Algebra (eller motsvarande i annan bok). Vi återkommer därför till detta i kursen Linjär algebra och flervariabelanalys.

Vi återvänder först till exempel 2 ovan och skriver om lösningen på vektorform.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_3e^{i\sqrt{2}t} \begin{bmatrix} 1 \\ -i2\sqrt{2} \end{bmatrix} + C_4e^{-i\sqrt{2}t} \begin{bmatrix} 1 \\ i2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Lösningarna till övriga exempel kan skrivas på samma sätt. Detta bör då gälla även ekvation (B) i de flesta fall.

Vi undersöker nu hur vi skall kunna hitta dessa lösningar.

Vi prövar först med en lösningsansats $\boldsymbol{x} = Ce^{rt}\boldsymbol{v}$.

Insättning i ekvation (B) ger då $Cre^{rt}\boldsymbol{v} = Ce^{rt}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}$ och alltså $r\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}$. Vi finner alltså att $\boldsymbol{x} = Ce^{rt}\boldsymbol{v}$ är en lösning till $\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$ om och endast om $\boldsymbol{v}$ är en vektor $\neq \boldsymbol{0}$ sådan att $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = r\boldsymbol{v}$ för något tal $r$.

En sådan vektor $\boldsymbol{v}$ kalls för egenvektor till matrisen $\boldsymbol{A}$. Talet $r$ kallas för egenvärde till matrisen $\boldsymbol{A}$. Att finna egenvärden och egenvektorer till en matris $\boldsymbol{A}$ är ett rent algebraiskt problem som vi måste reda ut här.

Vi skriver först om ekvationen $\boldsymbol{Av} = r\boldsymbol{v}$ till $(r\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. En egenvektor är ju en icke-trivial lösning till denna ekvation. Sådan lösning finns, som bekant från algebrakursen, om och endast om $\det(r\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0$.

Vi sammanfattar detta i en sats som återkommer i senare kurs.

**Sats:** Egenvärdena till en matris $\boldsymbol{A}$ utgörs av nollställena till den karakteristiska ekvationen $\det(\boldsymbol{A} - r\boldsymbol{I}) = 0$. Egenvektorerna som svarar mot ett visst egenvärde $r$ utgörs av de icketriviala lösningarna till det homogena linjära ekvationssystemet $(r\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$

**Exempel 6:** Vi löser igen ekvationssystemet

$$\begin{cases} x'' - 2x + y' &= 0 \\ 2x' - y'' - y &= 0 \end{cases}$$

som vi ju skrivit om till det ekvivalenta systemet

$$\begin{cases} x' &= z \\ y' &= u \\ z' &= 2x - u \\ u' &= 2z - y \end{cases}$$

Här är $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ och den karakteristiska ekvationen är $\begin{vmatrix} r & 0 & -1 & 0 \\ 0 & r & 0 & -1 \\ -2 & 0 & r & 1 \\ 0 & 1 & -2 & r \end{vmatrix} = 0$ som efter utveckling ger $r^4 + r^2 - 2 = 0$.
Här får vi egenvärdena $r = 1$, $r = -1$, $r = i\sqrt{2}$ och $r = -i\sqrt{2}$.

Egenvektorerna får vi sedan som lösning till ekvationssystemen $(r\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$.
En egenvektor $\boldsymbol{v_1}$ till egenvärdet $r = 1$ får vi alltså som lösning till

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Detta system har lösningen $\boldsymbol{v_1} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1. \end{bmatrix}$

Alltså är $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = C_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ lösning till systemet av differentialekvationer.

På motsvarande sätt hittar vi egenvektorer till de övriga egenvärdena och får till slut

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = C_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_3 e^{i\sqrt{2}t} \begin{bmatrix} 1 \\ -i2\sqrt{2} \\ i\sqrt{2} \\ 4 \end{bmatrix} + C_4 e^{-i\sqrt{2}t} \begin{bmatrix} 1 \\ i2\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Här är vi egentligen bara intresserade av $x$ och $y$ varför vi skriver om lösningen till $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_3 e^{i\sqrt{2}t} \begin{bmatrix} 1 \\ -i2\sqrt{2} \end{bmatrix} + C_4 e^{-i\sqrt{2}t} \begin{bmatrix} 1 \\ i2\sqrt{2} \end{bmatrix}$ vilket är samma som vi fick med eliminationsmetoden.

□

### 1.2.3 Matrisexponentialfunktionen.

Vi skall nu studera ett tredje sätt att lösa ekvation (B), med matrisexponentialfunktionen. För att något förstå dess definition måste vi gå vidare med egenvektorsmetoden.

Antag att $\boldsymbol{A}$ är en $2\times 2$- matris och att vi funnit 2 egenvärden och egenvektorer. Låt nu $\boldsymbol{P}$ vara en $2\times 2$-matris vars kolonner är de två egenvektorerna som vi funnit. Då är $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PD}$ där $\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}$.

Detta följer direkt av hur matrismultiplikation är definierad. Motsvarande gäller uppenbarligen också om $\boldsymbol{A}$ är en $n\times n$-matris och vi funnit $n$ egenvärden och $n$ linjärt oberoende egenvektorer.
Multiplikation med $\boldsymbol{P}^{-1}$ ger $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{D}$. (Då det finns en matris $\boldsymbol{P}$ så att $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{D}$ där $\boldsymbol{D}$ är en diagonalmatris säger man att $\boldsymbol{A}$ är diagonaliserbar.)
Om vi nu gör substitutionen $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P\rho}$ så erhåller vi ,
$\boldsymbol{P\rho}'=\boldsymbol{AP\rho}$, dvs $\boldsymbol{\rho}'=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP\rho}=\boldsymbol{D\rho}$.
Utskrivet blir det $\begin{cases} \rho_1'(t) &= r_1\rho_1(t) \\ \rho_2'(t) &= r_2\rho_2(t) \end{cases}$

Löser vi dessa ekvationer så får vi $\rho_i=c_ie^{r_it}, \quad i=1,2$ vilket kan skrivas $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{Bc}$,
där $\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} e^{r_1t} & 0 \\ 0 & e^{r_2t} \end{bmatrix}$
Transformerar vi tillbaka så får vi $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P\rho}=\boldsymbol{PBc}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix} c_1e^{r_1t} \\ c_2e^{r_2t} \end{bmatrix}=c_1e^{r_1t}\boldsymbol{v}_1+c_2e^{2t}\boldsymbol{v}_2$

Antag nu att vi har begynnelsevillkoren $x_1(0)=x_{01}, x_2(0)=x_{02}$ eller kortare: $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$
Då blir $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{Pc}$ (ty $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}$ för $t=0$) och därmed är $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}_0$. Vi kan därför skriva $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{PBP}^{-1}\boldsymbol{x}_0$.
Genom att skriva $e^{r_it}$ som en Maclaurinserie, $e^{r_it}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(r_it)^k$, så inser man efter en smula eftertanke att diagonalmatrisen $\boldsymbol{B}$ kan skrivas som

$$\boldsymbol{B}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(t\boldsymbol{D})^k$$

och eftersom $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{PD}^k\boldsymbol{P}^{-1}$ så får vi

$$\boldsymbol{PBP}^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(t\boldsymbol{A})^k.$$

Det är nu naturligt att göra följande

**Definition:**

$$e^{t\boldsymbol{A}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(t\boldsymbol{A})^k.$$

$e^{t\boldsymbol{A}}$ är en matris som är definierad även om A *ej* är diagonaliserbar, och det visar sig att det går att derivera som "vanligt", dvs

$$\frac{d}{dt}e^{t\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}e^{t\boldsymbol{A}}.$$

**Sammanfattningsvis:** Differentialekvationen

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{Ax}, \quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$$

har lösningen

$$\boldsymbol{x}=e^{t\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}_0, \qquad \text{där}$$

$$e^{t\boldsymbol{A}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(t\boldsymbol{A})^k.$$

Om $\boldsymbol{A}$ är *diagonaliserbar* så är

$$e^{t\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{PBP}^{-1}, \quad \text{där}$$

$\text{P}=[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots;\boldsymbol{v}_n]$, och $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} e^{r_1t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{r_2t} & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{r_n} \end{bmatrix}$ och lösningen kan då skrivas

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{PBc}=c_1e^{r_1t}\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_ne^{r_nt}\boldsymbol{v}_n,$$

där $\boldsymbol{Pc} = \boldsymbol{x}_0$.

**Exempel 7:** Vi löser $\begin{cases} x' = -4x + 6y, & x(0) = 7 \\ y' = -3x + 5y, & y(0) = 4 \end{cases}$

Här är $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ och egenvärdena blir:

$0 = \begin{vmatrix} r+4 & -6 \\ 3 & r-5 \end{vmatrix} = r^2 - r - 2 = (r+1)(r-2), \quad r_1 = -1,\ r_2 = 2.$ Egenvektorerna: $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Alltså är

$$\boldsymbol{x} = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$ ger $c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$, dvs

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}, \text{och } \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Lösningen blir

$$\begin{cases} x = 6e^{-t} + e^{2t} \\ y = 3e^{-t} + e^{2t} \end{cases}$$

**Anm:** Här är $e^{t\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{2t} & -2e^{-t} + 2e^{2t} \\ e^{-t} - e^{2t} & -e^{-t} + 2e^{2t} \end{bmatrix}$, och

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{t\boldsymbol{A}} \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6e^{-t} + e^{2t} \\ 3e^{-t} + e^{2t} \end{bmatrix}$$

□

## 1.3 Lösningars existens och entydighet.

Som vi sett ovan kan högre ordningens differentialekvationer skrivas om till system av första ordningens ekvationer. Då vi nu skall titta på ett par satser om existens och entydighet för lösningar till differentialekvationer så är det praktiskt att formulera dessa för sådana system. Vi antar därför att ekvationen skrivs

$$\begin{cases} x_1' &= f_1(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ x_2' &= f_(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{cases}$$

eller kortare, $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ där $\boldsymbol{x} = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$ och $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$.

För att helt förstå satserna som följer krävs viss kunskap om funktioner av flera variabler. Vi kan återkomma till dem i senare kurs.

**Sats 1:** Antag att $I$ är ett öppet intervall och att $t_0 \in I$. Antag vidare att funktionen $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ är kontinuerlig och satisfierar följande villkor:

Det finns en konstant $k > 0$ så att
$|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_2)| \leq k|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|$ för alla $t \in I$ och alla $\boldsymbol{x}_1$ och $\boldsymbol{x}_2$.

Då har differentialekvationen $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ en unik lösning $\boldsymbol{x}(t)$ definierad för $t \in I$.
Beviset ligger långt utanför denna kurs och utelämnas därför.

Ett specialfall, system av linjära differentialekvationer, är värt att nämnas separat.

**Sats 2:** Antag att alla komponenterna i matrisen $\boldsymbol{A}(t)$ och i funktionen $\boldsymbol{g}(t)$ är kontinuerliga i det öppna intervallet $I$ och att $t_0 \in I$. Då har begynnelsevärdesproblemet

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{g}(t) \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$

en entydig lösning definierad för alla $t \in I$.

Denna sats är tillämpbar exempelvis då $\boldsymbol{A}$ är en konstant matris. Den säger då att ekvationssystemet $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ har unik lösning för alla begynnelsevillkor $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$. Den lösning som vi fann i förra avsnittet $\boldsymbol{x} = e^{t\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}_0$ är således den enda.

Kravet i sats 1 är ganska starkt. Det är exempelvis inte uppfyllt av differentialekvationen $x'(t) = x^2, \quad x(0) = b > 0$. En sats som är tillämpbar på den ekvationen är följande.

**Sats 3:** Antag att alla de partiella derivatorna av funktionen $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ är kontinuerliga i en omgivning av punkten $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$. Då finns lösning till begynnelsevärdesproblemet $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ definierad i något intervall $J$ som innehåller $t_0$. Lösningen är entydigt bestämd för $t$ nära $t_0$.

## 1.4 Övningar

1. (a) Lös systemet

$$\begin{cases} x' = 4x + 3y, & x(0) = 1 \\ y' = 2x + 3y, & y(0) = 1 \end{cases}$$

dels med eliminering, dels med egenvektormetoden.

(b) Vad är $e^{t\boldsymbol{A}}$?

2. (a) Beräkna $e^{t\boldsymbol{A}}$ om

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

(b) Lös systemet

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Lös systemet

$$\begin{cases} x' = x - 4z \\ y' = 5y + 4z \\ z' = -4x + 4y + 3z \end{cases}, x(0) = 4, y(0) = z(0) = 1.$$

4. (a) Lös systemet

$$\begin{cases} x' = 5x + 4y - 2z \\ y' = 4x + 5y + 2z \\ z' = -2x + 2y + 8z \end{cases}$$

(b) Beräkna $e^{t\boldsymbol{A}}$

5. Beräkna $e^{t\boldsymbol{A}}$ om

(a) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

6. Beräkna $e^{t\boldsymbol{A}}$ om

(a) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

## 1.5 Svar:

1. (a) $\begin{cases} x = \frac{6}{5}e^{6t} - \frac{1}{5}e^{t} \\ y = \frac{4}{5}e^{6t} + \frac{1}{5}e^{t} \end{cases}$

   (b) $e^{t\boldsymbol{A}} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3e^{6t}+2e^{t} & 3e^{6t}-3e^{t} \\ 2e^{6t}-2e^{t} & 2e^{6t}+3e^{t} \end{bmatrix}$

2. (a) $e^{t\boldsymbol{A}} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 5e^{2t}-e^{-2t} & -5e^{2t}+5e^{-2t} \\ e^{2t}-e^{-2t} & -e^{2t}+5e^{-2t} \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{cases} x = 5e^{2t} - e^{-2t} \\ y = e^{2t} - e^{-2t} \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = 2e^{3t} + 2e^{-3t} \\ y = 2e^{3t} - e^{-3t} \\ z = -e^{3t} + 2e^{-3t} \end{cases}$

4. (a) $c_1\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_1\frac{1}{9}e^{9t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + c_1\frac{1}{9}e^{9t}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

   (b) $e^{t\boldsymbol{A}} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4+5e^{9t} & -4+4e^{9t} & 2-2e^{9t} \\ -4+4e^{9t} & 4+5e^{9t} & -2+2e^{9t} \\ 2-2e^{9t} & -2+2e^{9t} & 1+8e^{9t} \end{bmatrix}$

5. (a) $e^{t\boldsymbol{A}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{3t}+e^{-t} & e^{3t}-e^{-t} \\ e^{3t}-e^{-t} & e^{3t}+e^{-t} \end{bmatrix}$

   (b) $e^{t\boldsymbol{A}} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 4e^{5t}+3e^{2t} & 3e^{5t}-3e^{2t} \\ 4e^{5t}-4e^{2t} & 3e^{5t}+4e^{2t} \end{bmatrix}$

6. (a) $e^{t\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $e^{t\boldsymbol{A}} = e^{t}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $e^{t\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 1 & t & t+t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$