CHALMERS | GÖTEBORGS UNIVERSITET

Matematiska institutionen
Carl-Henrik Fant

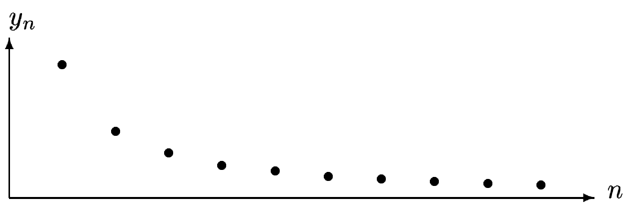
17 november 2000

3 Linjära differensekvationer med konstanta koefficienter.

3.1 Talföljder.

Med en talföljd $(y_n)_{n=n_0}^{\infty}$ menar vi en följd av rella eller komplexa tal y_n. För varje heltal $n \geq n_0$ ges således ett reellt eller komplext tal y_n.
Man kan uppfatta följden som en funktion **y** vars definitionsmängd är en delmängd av heltalen. Funktionens värdemängd är en delmängd av de reella eller de komplexa talen. Om alla y_n är rella så kan vi illustrera talföljdens/funktionens graf $\Gamma = \{(n, y_n) \ : \ n \geq n_0\}$ i ett ny-plan.

Exempel 1: Grafen till talföljden $y_n = \frac{1}{n}$ är $\{(n, \frac{1}{n}) \ : \ n \geq 1\}$



□

3.2 Differensekvationer.

3.2.1 Inledande exempel.

Talföljder förekommer flitigt i naturen.
Inom teknik och naurvetenskap studerar man ofta företeelser som beror av tiden. Om man då gör mätningar/observationer så kan detta inte ske oavbrutet vid alla tidpunkter, det vill säga med *kontinuerlig tid* . Mätningarna kan göras endast vid enstaka tidpunkter, det vill säga med *diskret tid*. Om en viss funktion $y(t)$ observeras vid tidpunkterna t_n $n = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$ så erhålls en talföljd $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ där $y_n = y(t_n)$.
I andra sammanhang kan man få en talföljd för att den studerade företeelsen är diskret till sin natur.
Biologer och demografer räknar exempelvis antalet individer födda ett visst år i ett bestämt geografiskt område.
Ekonomer räknar våra pengar på banken den 31/12 varje år. Till sin hjälp kan de utnyttja en formel som underlättar räknandet:
Om ett visst kapital K_0 sätts in på banken år 0 och räntefoten är r (räntan är rK kronor) så har kapitalet efter n år vuxit till $K_n = K(1 + r)^n$ kronor.
Vid varierande ränta så blir kalkylerna besvärligare men om räntan är konstant r_n under hela år n, så är

$$K_{n+1} = K_n(1 + r_n).$$

Detta är ett första exempel på en så kallad rekurrens- eller differensekvation.
Differensekvationer dyker även upp inom tekniken, exempelvis i reglerteknik.
Betrakta till exempel en enkel regulator, vars uppgift är att få en penna att följa en diskret insignal x_n. Den gör det genom att, vid tidpunkten t_{n+1}, korrigera pennans läge y_n med halva avvikelsen till det önskade läget x_n, vid tidpunkten t_n. Vi får alltså

$$y_{n+1} = y_n + (x_n - y_n)/2, \ eller \ 2y_{n+1} - y_n = x_n$$

där x_n är den kända insignalen.

Inom matematiken är det vanligt med talföljder som kan ges av en differensekvation. Låt exempelvis x_n vara dimensionen av det linjära rummet av symmetriska reella $n \times n$-matriser. Varje sådan matris kan byggas upp av en symmetrisk reell $(n-1) \times (n-1)$-matris genom att man lägger till en sista n-dimensionell radvektor och samma sista kolonn. Av detta inser man att

$$x_1 = 1, \ och \ x_n = x_{n-1} + n \ om \ n \geq 2.$$

Följaktligen är $x_1 = 1,\ x_2 = 1+2 = 3, x_3 = 1+2+3, \ldots, x_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
Ett annat exempel ges av Eulers metod för numerisk lösning av differentialekvationen $y' = f(t,y),\ y(0) = A$.
Denna metod bygger på approximatonen $y' \approx \frac{y(t+h)-y(t)}{h}$. Insatt i differentialekvationen ger denna approximation $\frac{y(t+h)-y(t)}{h} \approx f(t,y)$. I denna ersätter vi $\approx$ med $=$ och sätter $t_n = nh$ och $y_n = y(t_n)$. Vi får då en talföljd $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ där $y_0 = A$ och $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$ för $n \geq 0$.
Det finns andra sätt att *diskretisera* differentialekvationen $y' = f(t,y)$, men detta sätt får räcka som exemplifiering av idén.
Även andra ordningens derivata och högre, kan diskretiseras. Eftersom $y'' = (y')'$ så kan vi utgå från approximationen ovan. Vi får då

$$y'' \approx \frac{y'(t+h)-y'(t)}{h} \approx \frac{\frac{y(t+h+h)-y(t+h)}{h} - \frac{y(t+h)-y(t)}{h}}{h} = \frac{y(t+2h)-2y(t+h)+y(t)}{h^2}.$$

Differentialekvationen $y'' + ay' + by = f(t)$ kan på detta vis diskretiseras till differensekvationen $y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n + ah(y_{n+1} - y_n) + bh^2 y_n = h^2 f_n$.
Ytterligare exempel ges av iterativa metoder att lösa ekvationer. Ekvationen $F(x) = x$ löser vi ju med talföljden $x_{n+1} = F(x_n), \quad x_0 =$ startvärde. Ekvationen $f(x) = 0$ löser vi med Newton-Raphsons metod som också ger upphov till en talföljd. I dessa metoder är vi emellertid inte intresserade av talföljden som sådan, bara av gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} x_n$. Sådana frågor kommer inte att behandlas här.

3.3 Lösningsmetoder för differensekvationer.

Först en generell definition:
En linjär differensekvation av ordning m med konstanta koefficienter är en ekvation

$$y_{n+m} + a_{m-1}y_{n+m-1} + a_{m-2}y_{n+m-2} + \ldots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = f_n \quad \textit{för} \quad n \geq n_0.$$

Sats 1 Den linjära differensekvationen $y_{n+m} + a_{m-1}y_{n+m-1} + a_{m-2}y_{n+m-2} + \ldots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = f_n$ med begynnelsevärdena $y_{n_0} = b_0,\ y_{n_0+1} = b_1,\ \cdots,\ y_{n_0+m-1} = b_{m-1}$ har exakt en lösning.

Bevis: Om $y_{n_0}, y_{n_0+1}, \ldots, y_{n_0+m-1}$ är kända, så kan man räkna ut y_{n_0+m} genom

$$y_{n+m} = f_{n_0} - (a_{m-1}y_{n_0+m-1} + a_{m-2}y_{n_0+m-2} + \ldots + a_1 y_{n_0+1} + a_0 y_{n_0}).$$

Därefter kan y_{n_0+m+1} räknas ut och så vidare.
Med hjälp av kulram eller annan dator kan man givetvis räkna ut ett godtyckligt, men ändligt, antal element i följden y_n. Detta bevisar att ekvationen har exakt en lösning.

VSB.

Målet med följande sidor är att ersätta kulramen med matematiskt tankearbete och försöka hitta generella metoder för att bestämma följden $(y_n)_{n=n_0}^{\infty}$.
För att göra livet lättare, låter vi alla följder ha samma definitionsmängd, $n \geq 0$. Detta innebär ingen väsentlig inskränkning eftersom man alltid kan göra ett bokstavsbyte $z_n = y_{n+n_0}$.

Enligt teorin för linjära transformationer har vi följande allmänna princip. (Jämför med teorin för linjära differentialekvationer.)

Sats 2 Allmänna lösningen till differensekvationen $y_{n+m} + a_{m-1}y_{n+m-1} + a_{m-2}y_{n+m-2} + \ldots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = f_n$ ges av

$$y_n = y_n^{hom} + y_n^{part}$$

där y_n^{part} är *en* lösning till differensekvationen och y_n^{hom} är allmänna lösningen till den homogena differensekvationen $y_{n+m} + a_{m-1}y_{n+m-1} + a_{m-2}y_{n+m-2} + \ldots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = 0$.

□

3.3.1 Första ordningens ekvationer.

Exempel 2: Vi löser ekvationen $y_{n+1} - y_n = q(n)$ där $q(n)$ är ett polynom. Motsvarande homogena ekvation är $y_{n+1} - y_n = 0$. Denna kan skrivas $y_{n+1} = y_n$ och man inser att allmänna lösningen till denna är $y_n = A$ där A är en konstant. För att finna en partikulärlösning konstaterar vi först att om $y_n = n^m$ så är $y_{n+1} - y_n = (n+1)^m - n^m =$ ett polynom i n av grad $m-1$. De olika polynomen som vi får då $m \geq 1$ genererar således alla polynom, de bildar en bas för det linjära rummet av polynom. Om $q(n)$ är ett polynom så finns det alltså ett unikt polynom $Q(n)$ av samma grad så att $y_n = nQ(n)$ är en partikulärlösning till $y_{n+1} - y_n = q(n)$. Polynomet $Q(n)$ bestäms genom ansats. Allmänna lösningen till ekvationen $y_{n+1} - y_n = q(n)$ är sedan enligt ovan $y_n = nQ(n) + A$. Med liknande argument inses att allmänna lösningen till $y_{n+1} - y_n = a^n q(n)$ där $q(n)$ är ett polynom av grad m och $a \neq 1$ är $y_n = a^n Q(n) + A$ där $Q(n)$ är ett polynom av grad m sådant att $a^n Q(n)$ är partikulärlösning.

$\square$

Notera skillnaden/likheten mellan differential- och differensekvation. Den karakteristiska ekvationen för differensekvationen $y_{n+1} - y_n = 0$ är $r - 1 = 0$. Roten är $r = 1$ och ekvationens allmänna lösning är $y_n = A$. Detta motsvarar differentialekvationen $y' = 0$ vars karakteristiska ekvation är $r = 0$ och lösning $y(t) = A$. Sambandet mellan de två ekvationerna ges av eulers metod, som tillämpad på differentialekvationen $y' = 0$ ger differensekvationen $y_{n+1} - y_n = 0$.

Exempel 3: Låt oss vara konkreta och lösa ekvationen $y_{n+1} - y_n = n^2, \quad y_0 = 1$

Enligt ovan finns partikulärlösning $y_n^{part} = n(an^2 + bn + c) = an^3 + bn^2 + cn$. Insättning i differensekvationen ger då $a(n+1)^3 + b(n+1)^2 + c(n+1) - (an^3 + bn^2 + cn) = n^2$.

Utveckling av potenserna och sortering av termer ger $3an^2 + (3a + 2b)n + (a + b + c) = n^2$. Således är $y_n^{part} = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$ och $y_n = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n + A$

Villkoret $y_0 = 1$ ger nu $A = 1$ och $y_n = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n + 1$

$\square$

Exempel 4: Betrakta ekvationen $y_{n+1} - ky_n = q(n)$ där $q(n)$ är ett polynom i n och $k \neq 1$. Den homogena ekvationen kan skrivas $y_{n+1} = ky_n$ och vi ser att $y_n^{hom} = Ak^n$. För att finna en partikulärlösning observerar vi först att om $y_n = n^m$ så är $y_{n+1} - ky_n = (n+1)^m - kn^m$ som är ett polynom av grad m. Precis som ovan kan vi då konstatera att det finns en partikulärlösning $y_n^{part} = Q(n)$ där $Q(n)$ är ett polynom av samma grad som $q(n)$. Notera att vi här inte har faktorn n som i fallet $k = 1$. Allmänna lösningen är alltså $y_n = Ak^n + Q(n)$

$\square$

Exempel 5: Ekvationen $y_{n+1} + 2y_n = n^2$ har enligt ovan $y_n^{hom} = A(-2)^n$ och $y_n^{part} = an^2 + bn + c$.

Insättning i ekvationen ger $a(n+1)^2 + b(n+1) + c + 2(an^2 + bn + c) = n^2$. Utveckling av potenserna och sortering av termer ger $3an^2 + (2a+3b)n + (a+b+3c) = n^2$. Således är $y_n^{part} = \frac{1}{3}n^2 - \frac{2}{9}n - \frac{1}{27}$.

Allmänna lösningen är således $y_n = \frac{1}{3}n^2 - \frac{2}{9}n^2 - \frac{1}{27} + A(-2)^n$.

$\square$

3.3.2 Den homogena ekvationen.

Vi behandlar först andra ordningens ekvation $y_{n+2} + ay_{n+1} + by_n = 0$
Karakteristiska ekvationen till denna är $r^2 + ar + b = 0$. Vi får då följande sats, som är helt analog med motsvarande för differentialekvationer.

Sats 3: Antag att den karakteristiska ekvationen till den linjära differensekvationen
$y_{n+2} + ay_{n+1} + by_n = 0$ har rötterna r_1 och r_2.

Då ges allmänna lösningen av:
$y_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ om $r_1 \neq r_2$
och
$y_n = (C_1 n + C_2) r_1^n$ om $r_1 = r_2$

Bevis: Antag först att $r_1 \neq r_2$ och visa att r_1^n och r_2^n är lösningar till ekvationen.

Sätt $y_n = r_1^n$. Då är $y_{n+2} + a y_{n+1} + b y_n = r_1^{n+2} + a r_1^{n+1} + b r_1^n = r_1^n (r_1^2 + a r_1 + b) = 0$ eftersom r_1 är rot till $r^2 + ar + b = 0$. Alltså är r_1^n lösning. Givetvis gäller detta också r_2^n och alltså är $y_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ lösning för alla värden på C_1 och C_2.

För att se att detta är allmänna lösningen räcker det enligt sats 1 att visa att man alltid kan välja C_1 och C_2 så att villkoren $y_0 = a_0$ och $y_1 = a_1$ är uppfyllda.

Med $y_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ är $y_0 = C_1 + C_2$ och $y_1 = r_1 C_1 + r_2 C_2$. $C_1,\ C_2$ skall alltså vara lösning till ekvationssystemet
$\left\{ \begin{array}{lcl} C_1 + C_2 & = & a_0 \\ r_1 C_1 + r_2 C_2 & = & a_1 \end{array} \right.$. Detta system har determinanten $r_2 - r_1 \neq 0$ och har alltid unik lösning.

Antag nu att $r_1 = r_2$. Skall då visa att även $y_n = n r_1^n$ satisfierar ekvationen. Med $y_n = n r_1^n$ är $y_{n+2} + a y_{n+1} + b y_n = (n+2) r_1^{n+2} + a(n+1) r_1^{n+1} + b n r_1^n = n r_1^n (r_1^2 + a r_1 + b) + r_1^{n+1}(2r_1 + a) = 0$ ty här är både $r_1^2 + a r_1 + b = 0$ och $2r_1 + a = 0$ då $r_1 = r_2$ eftersom $a = -(r_1 + r_2) = -2r_1$.
Således är $y_n = (C_1 n + C_2) r_1^n$ lösning till ekvationen.

Som ovan räcker det att visa att man alltid kan välja C_1 och C_2 så att villkoren $y_0 = a_0$ och $y_1 = a_1$ är uppfyllda.
Ekvationssystemet blir i detta fall
$\left\{ \begin{array}{lcl} C_2 & = & a_0 \\ (C_1 + C_2) r_1 & = & a_1 \end{array} \right.$ som också alltid har unik lösning.

VSB.

Motsvarande sats gäller även för högre ordningens differensekvationer. Den karakteristiska ekvationen till
$y_{n+m} + a_{m-1} y_{n+m-1} + a_{m-2} y_{n+m-2} + \cdots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = 0$ är
$r^m + a_{m-1} r^{m-1} + a_{m-2} r^{m-2} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0.$

Sats 3' Antag att den karakteristiska ekvationen till $y_{n+m} + a_{m-1} y_{n+m-1} + a_{m-2} y_{n+m-2} + \cdots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = 0$ har rötterna r_1 av multiplicitet m_1, r_2 av multiplicitet $m_2, \cdots$, och r_l av multiplicitet m_l.
Då är allmänna lösningen till differensekvationen

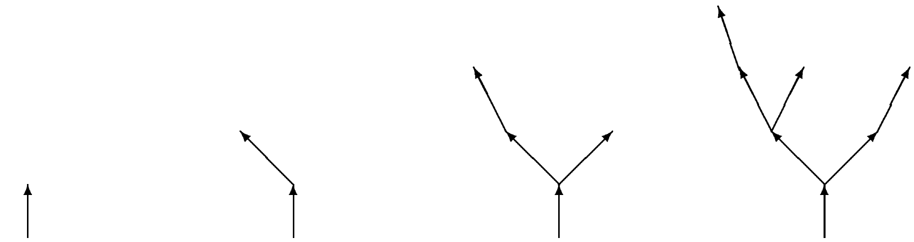
$$y_n = r_1^n q_1(n) + r_2^n q_2(n) + r_3^n q_3(n) + \ldots + r_l^n q_l(n)$$

där $q_i(n)$ är ett polynom av grad $\leq m_i - 1$ (med m_i fria konstanter).

Detta kan bevisas som ovan men görs bäst med annan teknik. Beviset utelämnas.

$\square$

Exempel 6: Fibonaccitalen
Detta är ett klassiskt exempel. Fibonaccitalen dyker bland annat upp inom biologin. I en mycket enkel modell för förgrening kan man tänka sig att i spetsen av varje gren bildas två tillväxtanlag i slutet av året, ett som får grenen att växa nästa år och ett som ger upphov till en ny gren efter ett år. Det ser alltså ut så här:



Antalet grenar, F_n, kallas fibonaccitalen och ges alltså av

$$F_0 = 1,\ F_1 = 1 \; och \; F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

För att bestämma fibonaccitalen skall vi således lösa differensekvationen

$$F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0,\ \ F_0 = 1 \; och \; F_1 = 1.$$

Differensekvationens karakteristiska ekvation är

$$r^2 - r - 1 = 0$$

vars lösningar är

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Differensekvationens allmänna lösning är därför

$$F_n = C_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + C_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n.$$

$F_0 = 1$ och $F_1 = 1$ ger

$$C_1 + C_2 = 1$$

och

$$C_1\frac{1+\sqrt{5}}{2} + C_2\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1.$$

Dessa ekvationer löses lätt och vi får

$$F_n = \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}.$$

□

Exempel 7: Vi löser ekvationen

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = 0.$$

Lösning: Differensekvationens karakteristiska ekvation är

$$r^2 - 2r + 2 = 0.$$

Lösningarna till denna är $r = 1 \pm j$ vilket ger

$$x_n = C_1(1+j)^n + C_2(1-j)^n.$$

Denna lösning kan vi skriva på reell form.

$$\begin{aligned} x_n &= C_1(\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}})^n + C_2(\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}})^n \\ &= (\sqrt{2})^n(C_1(\cos\frac{n\pi}{4} + j\, sin\frac{n\pi}{4}) + C_2(\cos\frac{n\pi}{4} - j\sin\frac{n\pi}{4}) \\ &= 2^{n/2}(A\cos\frac{n\pi}{4} + B\sin\frac{n\pi}{4}). \end{aligned}$$

□

Anmärkning: De konjugerade komplexa rötterna till en reell ekvation har alltid samma multiplicitet. Det är därför alltid möjligt att skriva lösningen till en reell differensekvation på reell form.

3.3.3 Partikulärlösning till den inhomogena ekvationen

$y_{n+m} + a_{m-1}y_{n+m-1} + a_{m-2}y_{n+m-2} + \ldots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = f_n$.

1 $f_n = q(n)$ **där** $q(n)$ **är ett polynom.**

1.1 y_n^{hom} **innehåller inget polynom, dvs** $r = 1$ **är inte rot till karakteristiska ekvationen. Ansats:** $y_n^{part} = Q(n)$ där $Q(n)$ är ett polynom av samma grad som $q(n)$.

1.2 $r = 1$ **är rot av multiplicitet k, där** $k \geq 1$**, till den karakteristiska ekvationen. Ansats:** $y_n^{part} = n^k Q(n)$ med $Q(n)$ enligt 1.1.

Anmärkning Om vi jämför med motsvarande problem för en differentialekvation så noterar vi att i det fallet är roten $r = 0$ till den karakteristiska ekvationen kritisk. Till en differentialekvation med högerled x gör vi ansatsen $y = Ax + B$ om $r = 0$ inte är rot till karakteristiska ekvationen. Om $r = 0$ är rot av multiplicitet m så gör vi ansatsen $y = x^m(Ax + B)$ eftersom polynom av lägre grad är lösningar till den homogena ekvationen.

Exempel 8: Vi löser ekvationen $y_{n+2} + 2y_{n+1} - y_n = n$.
(K.E) $r^2 + 2r - 1 = 0$ har röttena $r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2} \neq 1$.
Vi gör ansatsen $y_n^{part} = An + B$ och får:

$$y_{n+2} + 2y_{n+1} - y_n = A(n+2) + B + 2(A(n+1) + B) - (An + B) = 2An + 4A + 2B = n.$$

Således är $A = \frac{1}{2}$ och $B = -1$ vilket ger

$$y_n = C_1(-1 + \sqrt{2})^n + C_2(-1 - \sqrt{2})^n + \frac{1}{2}n - 1.$$

□

Exempel 9: Vi löser ekvationen $y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = n$.
(K.E) $r^2 - 2r + 1 = 0$ har rötterna $r_{1,2} = 1$, så $y_n^{hom} = C_1 n + C_2$.
Ansats: $y_n = n^2(An + B) = An^3 + Bn^2$.
$y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = (A(n+2)^3 + B(n+2)^2) - 2(A(n+1)^3 + B(n+1)^2) + (An^3 + Bn^2) = n6A + (6A + 2B) = n$
Således är $A = \frac{1}{6}$ och $B = -\frac{1}{2}$ vilket ger

$$y_n = \frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + C_1 n + C_2.$$

□

Exempel 10: Vi söker en formel för beräkning av summan $\Sigma_{k=0}^n k(k+1)$.
Vi sätter $y_n = \Sigma_{k=0}^n k(k+1)$ Då är $y_{n+1} - y_n = (n+1)(n+2),\ y_0 = 0$.
Den karakteristiska ekvationen har roten 1 så vi gör ansatsen $y_n^{part} = n(An^2 + Bn + C)$. Insättning ger nu
$A(n+1)^3 + B(n+1)^2 + C(n+1) - (An^3 + Bn^2 + Cn) = 3An^2 + (3A + 2B)n + (A + B + C) = n^2 + 3n + 2$.
Följaktligen är $A = \frac{1}{3},\ B = 1$ och $C = \frac{2}{3}$.
Ekvationens allmänna lösning är då $y_n = \frac{1}{3}n^3 + n^2 + \frac{2}{3}n + D$. Men $y_0 = 0$ så $D = 0$ och vi har funnit att

$$\Sigma_{k=0}^n k(k+1) = \frac{1}{3}n^3 + n^2 + \frac{2}{3}n.$$

□

2 $f_n = q(n)a^n$ **där** $q(n)$ **är ett polynom.**

Ansats: $y_n^{part} = a^n z_n$.
Det kommer då att vara möjligt att dividera med a^n och partikulärlösning z_n bestäms som ovan.

Exempel 11: Vi löser ekvationen $y_{n+3} - 4y_{n+2} + 5y_{n+1} - 2y_n = n2^n$.
(K.E) $r^3 - 4r^2 + 5r - 2 = 0$ har rötterna $r_{1,2} = 1$ och $r_3 = 2$.
För att bestämma y_n^{part} så gör vi ansatsen $y_n = 2^n z_n$ vilket ger

$$\begin{aligned} y_{n+3} - 4y_{n+2} + 5y_{n+1} - 2y_n &= 2^{n+3}z_{n+3} - 4\cdot 2^{n+2}z_{n+2} + 5\cdot 2^{n+1}z_{n+1} - 2\cdot 2^n z_n = \\ 2^n(8z_{n+3} - 16z_{n+2} + 10z_{n+1} - 2z_n) &= n2^n \end{aligned}$$

Således skall z_n vara partikulärlösning till $8z_{n+3} - 16z_{n+2} + 10z_{n+1} - 2z_n = n$.
För att avgöra vilken ansats som skall göras undersöker vi denna ekvations karakteristiska ekvation: (K.E.2) $8r^3 - 16r^2 + 10r - 2 = 0$ Eftersom denna uppkommit genom att vi ersatt r med $2r$ i den ursprungliga (K.E) så inser vi att $r = 1$ är rot till (K.E.2) av samma multiplicitet som $r = 2$ är rot till (K.E). Följaktligen skall vi göra ansatsen $z_n = n(An + B)$. Insättning som i tidigare exempel ger $z_n = \frac{1}{4}n^2 - \frac{9}{4}n$.
Ekvationens allmänna lösning är slutligen:
$y_n = (\frac{1}{4}n^2 - \frac{9}{4}n + C_1)2^n + C_2 n + C_3$.

□

3.4 Övningsuppgifter.

1. Bestäm y_n om
   (a) $y_{n+1} = 7y_n,\ y_0 = 2$
   (b) $y_{n+2} - y_{n+1} - 2y_n = 0,\ y_0 = 0,\ y_1 = 1$
   (c) $2y_{n+2} + 3y_{n+1} - 2y_n = 0,\ y_1 = 0,\ y_3 = -1$
   (d) $y_{n+1} + y_n = 2,\ y_0 = -1$
   (e) $y_{n+1} + 2y_n = n,\ y_0 = 0$
2. Lös differensekvationerna
   (a) $y_{n+2} + 4y_{n+1} + 4y_n = 0$
   (b) $y_{n+2} + 6y_{n+1} + 9y_n = 0$
   (c) $y_{n+3} - y_{n+2} - 2y_{n+1} + 2y_n = 0$
   (d) $y_{n+3} + 7y_{n+2} + 14y_{n+1} + 8y_n = 0$
3. Lös differensekvationerna
   (a) $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 3y_n = -4$
   (b) $y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = -4$
   (c) $y_{n+2} - 3y_{n+1} - 10y_n = 36n - 21$
   (d) $y_{n+2} - 4y_n = -6n^2 + 8n + 17 + 2^{n+1}$
   (e) $y_{n+3} - y_{n+2} - y_{n+1} + y_n = n$
4. Låt $y_n = \Sigma_{k=0}^{n}(k-1)(k+2)$ för $n \geq 0$.
   Teckna en differensekvation som satisfieras av y_n och bestäm y_n med dess hjälp.
5. Låt $y_n = \Sigma_{k=0}^{n}(n-k)2^k$ för $n \geq 0$.
   Visa att y_n satisfierar differensekvationen $y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 2^{n+1}$.
   Utnyttja detta för att bestämma y_n.
6. Låt $y_n = \Sigma_{k=0}^{n}(n+k)^2 3^k$ för $n \geq 0$.
   Teckna en differensekvation som satisfieras av y_n och bestäm y_n med dess hjälp.
7. Diskretisera differentialekvationen $y' - ay = 0$. Lös den erhållna differensekvationen. Jämför lösningen till differentialekvationen med lösningen till differensekvationen då $h \to 0$.

8. Diskretisera differentialekvationen $y'' + 3y' + 2y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$. Lös den erhållna differensekvationen. Jämför lösningen till differentialekvationen med lösningen till differensekvationen då $h \to 0$.

9. Lös följande system av linjära differensekvationer:
$$\begin{cases} x_{n+1} + y_{n+1} + z_{n+1} + x_n + y_n + z_n = 0 \\ 2x_{n+1} + y_{n+1} + 2z_{n+1} + x_n + 2y_n + z_n = 0 \\ 2x_{n+1} + 2y_{n+1} + z_{n+1} + x_n + y_n + 2z_n = 0 \end{cases}$$

10. På en ö finns rävar och kaniner. Kaninerna är byten för rävarna som givetvis äter andra smådjur också. I medeltal tar varje räv 0.3 kaniner per månad. En del kaniner dör av exvis ålder, dessutom föds alltid nya kaniner. Om inga kaniner blev rävföda så skulle antalet kaniner öka med 10% varje månad. Låt antalet rävar månad n vara r_n och antalet kaniner vara k_n. Då är alltså $k_{n+1} = 1.1k_n - 0.3r_n$.

    Även antalet rävar förändras. Om inga kaniner fanns skulle rävantalet minska med 60% varje månad. Varje kanin gör att i medeltal ytterligare 0.2 rävar överlever.

    Ställ upp ett system av differensekvationer som beskriver situationen ovan och bestäm k_n och r_n om $k_0 = 100$ och $r_0 = 10$. Bestäm också $\lim_{n\to\infty} k_n$ och $\lim_{n\to\infty} r_n$.

3.5 Svar till övningsuppgifter.

1. (a) $y_n = 2 * 7^n$
   (b) $y_n = \frac{1}{3}(2^n + (-1)^{n+1})$
   (c) $y_n = \frac{1}{15}(8 * 2^{-n} + 2(-2)^n)$
   (d) $y_n = 1 - 2(-1)^n$
   (e) $y_n = \frac{1}{9}(3n - 1 + (-2)^n)$

2. (a) $y_n = (A + Bn)(-2)^n$
   (b) $y_n = (A + Bn)(-3)^n$
   (c) $y_n = A + B\sqrt{2}^n + C(-\sqrt{2})^n$
   (d) $y_n = A(-1)^n + B(-2)^n + C(-4)^n$

3. (a) $y_n = A + B3^n + 2n$
   (b) $y_n = A + Bn - 2n^2$
   (c) $y_n = A5^n + B(-2)^n - 3n + 2$
   (d) $y_n = (A + \frac{n}{4})2^n + B(-2)^n + 2n^2 - 3$
   (e) $y_n = \frac{1}{12}n^3 - \frac{7}{24}n^2 + An + B + C(-1)^n$

4. $y_{n+1} - y_n = n(n+3),\ y_0 = -2,\ \ y_n = (n^3 + 3n^2 - 4n - 6)/3$

5. $y_n = 2^{n+1} - n - 2$

6. $y_{n+3} - 3y_{n+2} + 3y_{n+1} - y_n = 3^{n+1}(16n^2 + 136n + 256)$
   $y_n = (2n^2 - n + \frac{1}{2})3^{n+1} - \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n - \frac{3}{2}$

7. $y_{n+1} - (1 + ah)y_n = 0$
   $y_n = A(1 + ah)^n = A((1 + ah)^{\frac{1}{ah}})^{ahn} \to Ae^{at_n}\ om\ h \to 0$

8. $y_{n+2} + (3h - 2)y_{n+1} + (2h^2 - 3h + 1)y_n = 0,\ y_0 = 0,\ y_1 - y_0 = h$
   $y_n = (1 - h)^n - (1 - 2h)^n \to e^{-t_n} - e^{-2t_n}$

9. $\begin{cases} x_n &= A \\ y_n &= B + C(-1)^n \\ z_n &= -A - B + C(-1)^n \end{cases}$

10. $\begin{cases} k_{n+1} &= 1,1k_n - 0,3r_n \\ r_{n+1} &= 0,2k_n + 0.4r_n \end{cases}$
    $k_n = 114 - 14\frac{1}{2^n} \quad r_n = 38 - 28\frac{1}{2^n}$