



17 november 2000

2 Något om kurvskaror.

2.1 Ortogonalkurvor.

2.1.1 Cartesiska koordinater.

Betrakta kurvskaran bestående av ellipserna

$$x^2 + 4y^2 = C, \quad C > 0.$$

För varje värde på parametern C har vi alltså en kurva Γ_C , vars ekvation är $x^2 + 4y^2 = C$. Genom varje punkt i planet går precis en kurva.

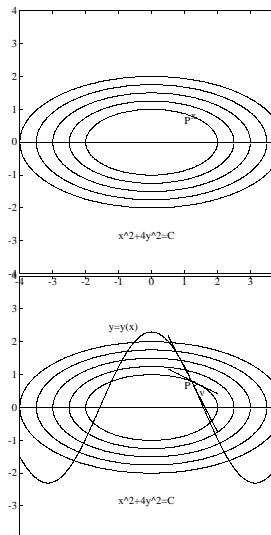
Genom punkten $P = (x_0, y_0)$ går kurvan

$$\Gamma_{C_0} : x^2 + 4y^2 = C_0, \quad C_0 = x_0^2 + 4y_0^2.$$

Antag nu att vi har ännu en kurva $y = y(x)$. Denna skär kurvan Γ_{C_0} i punkten (x_0, y_0) , där $y_0 = y(x_0)$. Kurvorna skär varandra under en vinkel v , som är vinkeln mellan de två kurvornas tangenter i (x_0, y_0) .

En naturlig fråga är: *Finns det någon kurva, som skär alla kurvorna Γ_C under räta vinklar?*

I figuren ser vi att linjerna $x = 0$ respektive $y = 0$ är ortogonala mot alla ellipserna. Finns det några andra kurvor, som är ortogonala mot alla ellipsor som de skär?



Kurvskaran Γ_C har ett riktningsfält $y' = f(x, y)$, där alltså $y' = k_1$ är riktningskoefficient för tangenten till kurvan genom punkten (x, y) . Nu vet vi sedan tidigare att två linjer $y - y_0 = k_1(x - x_0)$ och $y - y_0 = k_2(x - x_0)$ är vinkelräta mot varandra $\Leftrightarrow k_1 k_2 = -1 \Leftrightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1}$. Således är kurvan $y = y(x)$ ortogonal mot kurvan Γ_{C_0} i punkten $(x_0, y_0) \Leftrightarrow y'(x_0) = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{f(x_0, y_0)}$. (Vi förutsätter att $f(x_0, y_0) \neq 0$.) Kurvan $y = y(x)$ är ortogonal mot alla kurvorna Γ_C om $y'(x) = -\frac{1}{f(x, y)}$ i alla punkter (x, y) .

Vi sammanfattar: Antag att kurvskaran Γ_C är lösningskurvorna till differentialekvationen $y' = f(x, y)$. Då är *ortogonalkurvorna* lösningskurvorna till

$$y' = \frac{-1}{f(x, y)}.$$

Exempel 1: Vi bestämmer ortogonalkurvorna till kurvskaran $x^2 + 4y^2 = C$.

Derivering av kurvskarans ekvation ger

$$2x + 8yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{4y} = f(x, y).$$

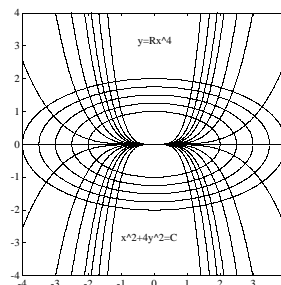
För $x \neq 0$ och $y \neq 0$ gäller alltså:

$y = y(x)$ är ortogonal mot ellipserna $x^2 + 4y^2 = C$

$$\Leftrightarrow y'(x) = -\frac{1}{f(x, y)} = \frac{4y}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{4dx}{x}.$$

Denna differentialekvation har allmän lösning



$$y = Rx^4, R \neq 0 \quad (R = 0 \Rightarrow y = 0, R \rightarrow \infty \Rightarrow x = 0.)$$

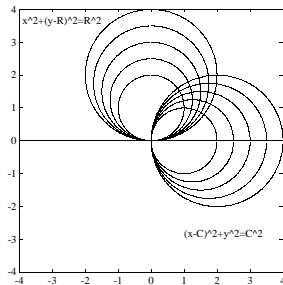
Ortogonal kurvorna till ellipserna är således alla fjärdegradskurvorna $y = Rx^4$ samt koordinataxlarna.

□

Anmärkning: Om vi, efter eliminering av C ur kurvskarans ekvation, inte kan/vill lösa ut y' , utan nöjer oss med ekvationen $F(x, y, y') = 0$, så är ortogonalskarans ekvation $F(x, y, \frac{-1}{y'}) = 0$.

Exempel 2: Vi bestämmer ortogonal kurvorna till kurvskaran $y^2 + x^2 - 2Cx = 0$.

Derivering av kurvskarans ekvation ger nu $C = yy' + x$. Insättning av detta i kurvskarans ekvation ger $y^2 + x^2 - 2(yy' + x)x = 0$.



Ortogonalskarans ekvation är då

$$y^2 + x^2 - 2\left(\frac{-y}{y'} + x\right)x = 0.$$

Denna kan förenklas till

$$\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1\right)y' + 2\frac{y}{x} = 0$$

Substitutionen $z = \frac{y}{x}$ leder till differentialekvationen

$$\left(-\frac{1}{z} + \frac{2z}{z^2 + 1}\right)dz + \frac{1}{x}dx = 0$$

vars lösning är

$$\ln \frac{x(z^2 + 1)}{z} = C_1$$

som omskrives till

$$y^2 + x^2 = 2Ry.$$

Kurvskaran består i detta fall av cirklar

$$(x - C)^2 + y^2 = C^2$$

med radie $|C|$ och medelpunkt $(C, 0)$.

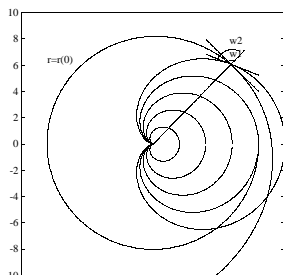
Ortogonal kurvorna är cirklar

$$x^2 + (y - R)^2 = R^2$$

med radie R och medelpunkt $(0, R)$.

□

2.1.2 Polära koordinater.



En kurvskara Γ_C , som ges i polära koordinater, kan även den erhållas som lösningskurvorna till en differentialekvation $r' = f(r, \theta)$.

I detta fall kan man visa att $\frac{r}{r'} = \tan w_1$

$$\text{Således är } \tan w_1 = \frac{r}{f(r, \theta)}$$

och ortogonal kurvornas ekvation är

$$\frac{r(\theta)}{r'(\theta)} = \tan w_2 = \frac{-1}{\tan w_1} = -\frac{f(r, \theta)}{r}$$

$$\text{alltså: } r' = -\frac{r^2}{f(r, \theta)}.$$

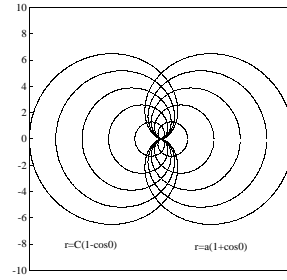
Exempel 3: Vi bestämmer ortogonalkurvorna till kardioiderna $r(\theta) = a(1 + \cos \theta)$.

Derivering ger $r' = -a \sin \theta$ och alltså $\frac{r}{r'} = \frac{1 + \cos \theta}{-\sin \theta}$.

Ortogonalkurvornas ekvation blir då $\frac{r'}{r} = \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}$.

Denna ekvation skrivs om till $\frac{dr}{r} = \frac{\sin \theta d\theta}{1 - \cos \theta}$ vars lösning är $r = C(1 - \cos \theta)$, $C > 0$

eller $r = C(1 + \cos(\theta + \pi))$. (Kardioider igen!)



□

2.2 Evolutan till en kurva.

Evolutan till en kurva är den kurva vars tangenter är normaler till den givna kurvan.

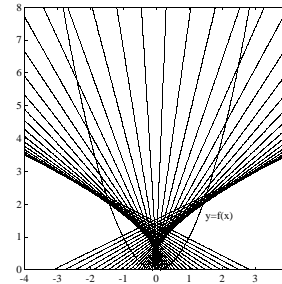
Antag att kurvan $y = f(x)$ är given. Normalen till denna kurva i en punkt $P_\xi = (\xi, f(\xi))$ har ekvationen

$$N_\xi : y - f(\xi) = -\frac{1}{f'(\xi)}(x - \xi).$$

Dessa normaler bildar alltså en linjeskara N_ξ .

Evolutan till kurvan $y = f(x)$ skall således ha denna linjeskara till tangenter.

Antag att linjen N_ξ tangerar evolutan i punkten $(x(\xi), y(\xi))$. I så fall ges riktningskoefficienten för N_ξ av $\frac{y'(\xi)}{x'(\xi)}$. Detta innebär att följande två villkor skall vara uppfyllda.



$$\begin{cases} y(\xi) - f(\xi) = -\frac{1}{f'(\xi)}(x(\xi) - \xi) & (x(\xi), y(\xi)) \in N_\xi \\ \frac{y'(\xi)}{x'(\xi)} = -\frac{1}{f'(\xi)} & N_\xi \text{ tangent} \end{cases}$$

Detta ekvationssystem är evolutans differentialekvation. För att bestämma $x(\xi)$ och $y(\xi)$ eliminerar vi exempelvis $y'(\xi)$ ur den andra ekvationen med hjälp av den första. Vi får då.

$$\begin{cases} y(\xi) - f(\xi) = -\frac{1}{f'(\xi)}(x(\xi) - \xi) & = 0 \\ \frac{f''(\xi)}{(f'(\xi))^2}(x(\xi) - \xi) + \frac{1}{f'(\xi)} + f'(\xi) & = 0 \end{cases}$$

Evolutans ekvation är således

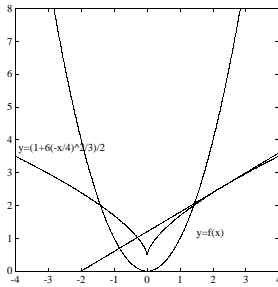
$$\begin{cases} x(\xi) - \xi = -\frac{(1 + (f'(\xi))^2)f'(\xi)}{f''(\xi)} \\ y(\xi) - f(\xi) = \frac{(1 + (f'(\xi))^2)}{f''(\xi)} \end{cases}$$

Värt att notera är att

$$((x(\xi) - \xi)^2 + (y(\xi) - f(\xi))^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{(1 + (f'(\xi))^2)^{\frac{3}{2}}}{|f''(\xi)|} = R_\xi$$

vilket betyder att punkten $(x(\xi), y(\xi))$ är *krökningscentrum* för kurvan $y = f(x)$ i punkten $(\xi, f(\xi))$. Krökningscentrum är med andra ord gränsläge för skärningspunkten mellan normalerna i två näraliggande punkter $(x, f(x))$ och $(\xi, f(\xi))$ då $x \rightarrow \xi$.

Exempel 4: Vi bestämmer evolutan till kurvan $y = x^2$.



Eftersom $f'(x) = 2x$ och $f''(x) = 2$ så är evolutans ekvation

$$\begin{cases} x(\xi) - \xi &= -\frac{(1 + (2\xi)^2)2\xi}{2} \\ y(\xi) - \xi^2 &= \frac{(1 + (2\xi)^2)}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(\xi) &= -4\xi^3 \\ y(\xi) &= \frac{1 + 6\xi^2}{2} \end{cases}$$

□

Låt oss slutligen bestämma evolutan till en kurva som ges på parameterform, $x = x(t), y = y(t)$. Då är

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

och

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{y'(t)}{x'(t)} \right) \frac{dt}{dx} = \frac{y''x' - y'x''}{(x')^2} \frac{1}{x'}$$

Evolutans ekvation blir nu

$$\begin{cases} x - x(t) &= -\frac{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)y'(t)}{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)} \\ y - y(t) &= \frac{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)x'(t)}{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)} \end{cases}$$

2.3 Övningsuppgifter.

1. Bestäm ortogonalkurvorna till

- | | |
|---|--|
| (a) Parablerna $y = Cx^2$. | (e) Kurvskaran $y = Ce^{x^2}$. |
| (b) Parablerna $y^2 + 2Cx = C^2$. | (f) Rosettkurvorna $r = C \cos 3\theta $. |
| (c) Andragradskurvorna $x^2 + Cy^2 = 1$. | (g) Spiralerna $r = Ce^\theta$. |
| (d) Tredjegradskurvorna $y = Cx^3$. | (h) Hyperboliska spiralerna $r = \frac{C}{\theta}$. |

2. En rak stång rullar utan glidning på en cirkel. Punkten P på stången är från början tangeringspunkt. Beskriv kurvan som P genomlöper. (Ge en parametrisering av kurvan.) Bestäm kurvans evoluta. Kurvan kallas *cirkelevolventen*. Den dyker upp i samband med konstruktion av evolventkugg, maskinelement del B.

2.4 Svar till övningsuppgifter.

- | | |
|-------------------------------|---|
| 1. (a) $x^2 + 2y^2 = C$ | (e) $x = Ce^{-y^2}$ |
| (b) $y^2 + 2Cx = C^2$ | (f) $r = C \sin 3\theta ^{\frac{1}{3}} \quad C > 0$ |
| (c) $x^2 + y^2 = C + \ln x^2$ | (g) $r = Ce^{-\theta}$ |
| (d) $x^2 + 3y^2 = C$ | (h) $r = Ce^{\frac{\theta^2}{2}}$ |

2. $x = a(\cos t + t \sin t), y = a(\sin t - t \cos t)$, Evolutan är cirkeln.