Chalmers Tekniska Högskola

Lösning till tentamen i Matematisk analys i en variabel, del B, för M1 och TD1, 20000818,

1. Lös begynnelsevärdesproblemet $y'' - 6y' + 9y = e^{3x},\ \ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$ (6p)

   Lösning: Karakteristisk ekvation $(r-3)^2 = 0$ ger allmän ösning till homogena ekvationen $y_h = (Ax+B)e^{3x}$. Ansats $y_p = Cx^2e^{3x}$ ger $C((9x^2+12x+2)-6(3x^2+2x)+9x^2)e^{3x} = e^{3x} \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}$. Alltså $y = (\frac{1}{2}x^2 + Ax + B)e^{3x}$. Begynnelsevillkoren ger $B = 1$ och $A = -3$.

   Svar: $y = (\frac{1}{2}x^2 - 3x + 1)e^{3x}$.

2. Bestäm masscentrum för den kropp som bildas då den halva cirkelskivan $(x-4)^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq 0$ roterar kring y-axeln. Densiteten är konstant. (6p)

   Lösning: Av symmetriskäl är $x_T = 0$. För beräkning av y_T betraktar vi en skiva av kroppen, parallell med xz-planet. Denna skiva är ringformad med innerradie $4 - \sqrt{4-y^2}$ och ytterradie $4 + \sqrt{4-y^2}$. Ringens area är då: $A(y) = \pi((4+\sqrt{4-y^2})^2 - (4-\sqrt{4-y^2})^2) = \pi 16\sqrt{4-y^2}$ och kroppens volym: $\int_0^2 A(y)dy = \int_0^2 \pi 16\sqrt{4-y^2} = 16\pi^2$.

   Masscentrum ges nu av $y_T = \frac{1}{V}\int_0^2 yA(y)dy = \frac{1}{\pi}\int_0^2 y\sqrt{4-y^2} = \frac{8}{3\pi}$.

   Svar:$(x_T, y_T) = (0, \frac{8}{3\pi})$.

3. Av misstag späder studenten E koncentrerad saft i förhållandet 1:4 (en del saft till fyra delar vatten) i stället för den avsedda 1:7. Saftglaset är då fullt. För att successivt få en mer välsmakande saft, dricker E saften i jämn takt, samtidigt som hon fyller på vatten under omrörning så att glaset ständigt innehåller exakt lika mycket. Hur många glas har E druckit då saften i glaset har fått den den avsedda blandningen? (Vi förutsätter naturligtvis att saften hela tiden är perfekt blandad.) (6p)

   Lösning: Glasets volym är V (m^3), E dricker r (m^3/s), koncentrationen är $c(t)$ vid tiden t (s) efter start då koncentrationen är $c(0) = \frac{1}{1+4} = 0,2$.

   Saftmängden $m(t) = c(t)V$ och förändringshastigheten $m'(t) = -rc(t)$. Koncentrationen är alltså lösning till differentialekvationen: $c'(t) = \frac{r}{V}c(t),\ c(0) = 1/5$. Vi söker T så att $c(T) = \frac{1}{1+7} = \frac{1}{8}$ eller snarare den urdruckna volymen (i glas räknat) $N = \frac{rT}{V}$.

   Differentialekvationen har lösningen $c(t) = \frac{1}{5}e^{-\frac{rt}{V}}$ så T ges av $\frac{1}{8} = \frac{1}{5}e^{-\frac{rT}{V}}$ och $\frac{rT}{V} = -\ln\frac{5}{8} \approx 0,5$

   Svar: Ett halvt glas.

4. Bestäm konstanter a, b, c och k så att $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}\cos 2x - (a + bx + cx^2)}{kx^3} = 1.$ (6p)

   Lösning: Maclaurinutveckling ger $e^{-x}\cos 2x = (1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + x^4B_1(x))(1 - \frac{1}{2}(2x)^2 + x^4B_2(x)) = 1 - x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 + x^4B(x)$. Detta ger svaret nedan.

   Svar: $a = 1,\ b = -1,\ c = -\frac{3}{2},\ k = \frac{11}{6}$

5. Antag att $b^2 > 4a$ och att $f(x)$ är en C^1-funktion.

   Låt $h(x)$ vara lösningen till $y'' + by' + ay = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

   Visa att $\displaystyle\int_0^x h(x-t)f(t)dt$ är partikulärlösning till $y'' + by' + ay = f(x)$. (6p)

   Lösning: Lös ekvationen, sätt in i integralen, bryt ut så att du får i princip $g(x)\int_0^x k(t)dt$, derivera (tillämpa huvudsatsen) och se att påst. är korrekt.

Lycka till!
Carl-Henrik