Lösningar till tentamen i analys B för M1 och TD1 001211

1. Beräkna a) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x+x^2}$ b) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x)(x+3)}}$.

a) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x+x^2} = \int_0^\infty \frac{dx}{\frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}\int_0^\infty \frac{dx}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \left[\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^\infty = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

b) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x)(x+3)}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-(x+1)^2}} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}} = \left[\arcsin\frac{x+1}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{3}$

2. a) Moster Anna satte in a kr på Kalles bankkonto i början av år 1. Hon sätter sedan vid varje årsskifte in b kr mer på Kalles bankkonto än hon gjorde året innan. Hur mycket pengar finns på Kalles bankkonto i början av år n. Inga andra insättningar eller uttag görs på Kalles konto förutom att räntan läggs till kapitalet vid varje årsskifte. Räntesatsen antas hela tiden vara p %.

Låt y_n vara behållningen på Kalles konto i början av år n. Vi sätter $r=1+\frac{p}{100}$ och antar att $p>0$. Vi får då

$y_{n+1} = ry_n + a + bn,\ y_1 = a$

Homogenlösning blir $y_n = Cr^n$

För att få en partikulärlösning ansätter vi $y_n = cn + d$. Insättning ger:

$c(n+1)+d-r(cn+d) = a+bn$, vilket ger:

$c=\frac{b}{1-r}$ och $d=-\frac{a(r-1)+b}{(r-1)^2}$.

Allmän lösning: $y_n = Cr^n + \frac{b}{1-r}n - \frac{a(r-1)+b}{(r-1)^2}$. $y_1 = a$ ger $C=\frac{a(r-1)+b}{(r-1)^2}$

Svar: behållningen på kalles konto år n är $\frac{a(r-1)+b}{(r-1)^2}r^n + \frac{b}{1-r}n - \frac{a(r-1)+b}{(r-1)^2}$

b) Lös differensekvationen $y_{n+1} = 3y_n + 1 + 2(n-1) + n^2$, $y_0 = 2$

Homogenlösning: $y_n = C\cdot 3^n$.

Partikulärlösning: Ansätt $y_n = an^2 + bn + c$. Insättning ger:

$a(n+1)^2 + b(n+1) + c - 3(an^2+bn+c) = 1 + 2(n-1) + n^2$

$-2a = 1$, $2a - 2b = 2$, $a + b - 2c = -1$ ger $a=-\frac{1}{2}$, $b=-\frac{3}{2}$ och $c=-\frac{1}{2}$.

Allmän lösning: $y_n = C \cdot 3^n - \dfrac{n^2+3n+1}{2}$. $y_0 = 2$ ger $C = \dfrac{5}{2}$.

Svar: $y_n = \dfrac{5}{2} \cdot 3^n - \dfrac{n^2+3n+1}{2}$

3. Lös differentialekvationen $y'' - 5y' + 6y = 10\sin x$.

Homogenlösning: $y = Ae^{3x} + Be^{2x}$.

Partikulärlösning: Ansätt $y = a\sin x + b\cos x$

$y' = a\cos x - b\sin x$ och $y'' = -a\sin x - b\cos x$. Insättning ger:

$-a\sin x - b\cos x - 5a\cos x + 5b\sin x + 6a\sin x + 6b\cos x = 10\sin x$ ger:

$5a + 5b = 10$, $-5a + 5b = 0$ eller $a = 1$, $b = 1$.

Svar $y = Ae^{3x} + Be^{2x} + \sin x + \cos x$

4. En natt började det snöa och snöfallet fortsatte med konstant intensitet. En snöplog körde ut kl. 05.00. Kl. 07.00 hade den plogat 20 km och kl. 09.00 hade den plogat ytterligare 10 km. När började det snöa. (Vi antar att plogens hastighet är omvänt proportionellt mot snötäckets tjocklek, d.v.s. den volym snö, som plogas bort per tidsenhet är konstant.)

Det börjar snöa a h före kl. 07.00. Plogen har kört sträckan $s(t)$ t h efter kl 07.00. Snötäckets tjocklek är proportionellt mot den tid det snöat d.v.s. $t + a$, Plogens hastighet är därför omvänt proportionell mot $t + a$. Vi erhåller därför:

$s'(t) = \dfrac{k}{t+a}$, vilket ger: $s(t) = k\ln(t+a) + C$

$s(0) = 0$ ger $k\ln a + C = 0$, $s(2) = 20$ ger $20 = k\ln(2+a) + C$ samt $s(4) = 30$ ger $30 = k\ln(4+a) + C$.
Vi får $20 = k(\ln(2+a) - \ln a)$ samt $30 = k(\ln(4+a) - \ln a)$, vilket ger:

$$\frac{3}{2} = \frac{\ln(4+a) - \ln a}{\ln(2+a) - \ln a} = \frac{\ln\frac{4+a}{a}}{\ln\frac{2+a}{a}} \Leftrightarrow \left(\frac{4+a}{a}\right)^2 = \left(\frac{2+a}{a}\right)^3$$, vilket ger $a = 1{,}24$.

1,24 h = 1 h 14 min. Svar det började snöa kl. 03.46.

5. Låt $f(x) = \sum_{k=0}^{18} (k+2)!x^k + x^{18}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2+x^3}}{\cos^2 x}$.

Beräkna $f^{(17)}(0)$ utan att utföra någon derivering.

Redogör noga för vilken eller vilka satser du stödjer dig på.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{18} (k+2)!x^k + x^{18}\frac{\sqrt{1+x+x^2+x^3}}{\cos^2 x} = \sum_{k=0}^{17} (k+2)!x^k + x^{18}\left(20! + \frac{\sqrt{1+x+x^2+x^3}}{\cos^2 x}\right)$$

$20! + \dfrac{\sqrt{1+x+x^2+x^3}}{\cos^2 x}$ är begränsad i en omgivning av $x = 0$ varför (1) är en maclaurinutveckling av f enligt entydighetssatsen för maclaurinutvecklingar.

$\because f^{(17)}(0) = 17! \cdot 19!$