Lösningar till tentamen i analys B för M1 och TD1 010419

1a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{x^2/2}\cos x}{x^4}$.

$$\frac{1-e^{x^2/2}\cos x}{x^4}=\frac{1-\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 O\left(x^6\right)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}O\left(x^6\right)\right)}{x^4}=$$

$$\frac{\frac{x^4}{4}-\frac{x^4}{8}-\frac{x^4}{24}+O(x^{6)}}{x^4}=\frac{1}{12}+O\left(x^2\right)\to\frac{1}{12}\text{ då }x\to 0$$

1b.

$$\frac{(\arctan x)^2+2\cos x-2}{e^{x^2}-\ln\left(1+x^2\right)-1}=\frac{\left(x-\frac{x^3}{3}+O\left(x^5\right)\right)^2-2\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+O\left(x^6\right)\right)-2}{\left(1+x^2+\frac{\left(x^2\right)^2}{2}+O\left(x^6\right)\right)-\left(x^2-\frac{x^4}{2}+O\left(x^6\right)\right)-1}=$$

$$\frac{-\frac{7}{12}+O\left(x^2\right)}{1+O\left(x^2\right)}\to-\frac{7}{12}\text{ då }x\to 0\,.$$

2. Lös differentialekvationen $y''-3y'+2y=x^2+e^{3x}$

Homogenlösning:

$r^2-3r+2=0\Leftrightarrow r=1, r=2.\quad y=Ae^x+Be^{2x}$

Partikulärlösning:

a. $y''-3y'+2y=x^2$ ….. (2)

Ansätt $y=ax^2+bx+c$. Derivering, insättning i ekvationen samt identifiering av koefficienter ger

$$a=\frac{1}{2},\quad b=\frac{3}{2},\quad c=\frac{7}{4}$$

Partikulärlösning till (2): $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{7}{4}$

b. $y''-3y'+2y=e^{3x}$ ….. (3)

Ansätt $y=ze^{3x}$

$$\left(D^2-3D+2\right)ze^{3x}=e^{3x}$$

$$e^{3x}\left((D+3)^2-3(D+3)+2\right)z=e^{3x}$$

$\left(D^2+3D+2\right)z=1$ vilket ger $z = \dfrac{1}{2}$.

$y=\dfrac{1}{2}e^{3x}$ är en partikulärlösning till (3)

$y=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{2}x+\dfrac{7}{4}+\dfrac{1}{2}e^{3x}$ är en partikulärlösning till (1).

Svar: $y=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{2}x+\dfrac{7}{4}+\dfrac{1}{2}e^{3x}+Ae^{x}+Be^{2x}$

3. Kurvbågen $y=\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{1}{2x}$, $1\le x\le 3$ har en homogen massfördelning. Beräkna tyngdpunktens koordinater.

Vi antar för enkelhetens skull att massan per längdenhet är 1. Då gäller:

$$x_T=\frac{1}{m}\int x\,dm=\frac{\int_1^3 x\sqrt{1+(y')^2}\,dx}{\int_1^3\sqrt{1+(y')^2}\,dx}=\frac{\frac{\ln 3}{2}+10}{\frac{14}{3}}\quad\frac{3\ln 3}{28}+\frac{15}{7}$$

$$y_T=\frac{1}{m}\int y\,dm=\frac{\int_1^3 y\sqrt{1+(y')^2}\,dx}{\int_1^3\sqrt{1+(y')^2}\,dx}=\frac{\frac{104}{9}}{\frac{14}{3}}=\frac{52}{21}$$

4. a) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{x^4-1}{x^6+x^4+x^2+1}\,dx$ är konvergent ty

$0\le\dfrac{x^4-1}{x^6+x^4+x^2+1}\le\dfrac{x^4}{x^6+x^4+x^2+1}\le\dfrac{x^4}{x^6}=\dfrac{1}{x^2}$ samt $\displaystyle\int_1^\infty\frac{1}{x^2}\,dx$ är konvergent.

4b. $\displaystyle\int_0^\infty\frac{x^4-1}{x^6+x^4+x^2+1}\,dx=\int_0^1\frac{x^4-1}{x^6+x^4+x^2+1}\,dx+\int_1^\infty\frac{x^4-1}{x^6+x^4+x^2+1}\,dx$

$$\int_1^\infty\frac{x^4-1}{x^6+x^4+x^2+1}\,dx=\left[x=\frac{1}{t},\quad dx=-\frac{1}{t^2}\,dt\right]=\int_0^1\frac{1-x^4}{x^6+x^4+x^2+1}\,dx$$

$$\because\int_0^\infty\frac{x^4-1}{x^6+x^4+x^2+1}\,dx=\int_0^1\frac{x^4-1}{x^6+x^4+x^2+1}\,dx+\int_0^1\frac{1-x^4}{x^6+x^4+x^2+1}\,dx=0$$

Svar: 0

5. $\begin{cases} v_n = y_{n+1} - r_1 y_n \\ v_{n+1} - r_2 v_n = 0 \end{cases}$

$v_{n+1} - r_2 v_n = 0$ ger $v_n = r_2 v_{n-1} = r_2^{\,2} v_{n-2} = r_2^{\,3} v_{n-3} = \ldots = r_2^{\,n} v_0$ vilket ger: $y_{n+1} - r_1 y_n = v_n = r_2^{\,n} v_0$

$$y_n = r_1 y_{n-1} + r_2^{\,n} v_0 = r_1\left(r_1 y_{n-2} + r_2^{\,n-1} v_0\right) + r_2^{\,n} v_0 = r_1^{\,2} y_{n-2} + r_1 r_2^{\,n-1} v_0 + r_0^{\,n} v_0 =$$

$$r_1^{\,2}\left(r_1 y_{n-3} + r_2^{\,n-2} v_0\right) + r_1 r_2^{\,n-1} v_0 + r_2^{\,n} v_0 = r_1^{\,3} y_{n-3} + r_1^{\,2} r_2^{\,n-2} v_0 + r_1 r_2^{\,n-1} v_0 + r_2^{\,n} v_0 =$$

$$r_1^{\,n} y_0 + r_1^{\,n} v_0 + r_1^{\,n-1} r_2 v_0 + \ldots + r_1^{\,2} r_2^{\,n-2} v_0 + r_1 r_2^{\,n-1} v_0 + r_2^{\,n} v_0 = \begin{cases} r_1^{\,n} y_0 + v_0 \dfrac{r_1^{\,n+1} - r_2^{\,n+1}}{r_1 - r_2} \text{ om } r_1 \neq r_2 \\ r_1^{\,n} y_0 + v_0 (n+1) r_1^{\,n} \text{ om } r_1 = r_2 \end{cases}$$

Om $r_1 \neq r_2$ gäller sålunda:

$$y_n = r_1^{\,n} y_0 + v_0 \frac{r_1^{\,n+1} - r_2^{\,n+1}}{r_1 - r_2} = \left(y_0 + v_0 \frac{r_1}{r_1 - r_2}\right) r_1^{\,n} + v_0 \frac{r_2}{r_1 - r_2} r_2^{\,n} = A r_1^{\,n} + B r_2^{\,n}$$

Om $r_1 = r_2$ gäller sålunda:

$$y_n = r_1^{\,n} y_0 + v_0 (n+1) r_1^{\,n} = \left(y_0 + v_0 + v_0 n\right) r_1^{\,n} = \left(A + Bn\right) r_1^{\,n}$$