CHALMERS | GÖTEBORGS UNIVERSITET

Matematiska Institutionen
Carl-Henrik Fant David Sjöstrand

7 november 2000

Veckoprogram för Matematisk analys i en variabel, del B, för M1 och TD1, 2000/2001

Temavecka 1: Integraler och användning av integraler. Kap 6, 7.1 – 7.3

Avsnitt	Innehåll	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	Extra
Kap 6	Integraler	1abd,2,3,4,9,11,25,46	6,8,12,13,14,15bc,16bc 17bc,19b,21,27,30ab,40	18c,20b,22,32,34

Redovisningsuppgifter (redovisningsdag: 31 okt)

1. Skriv journal om temaveckans matematik.
2. (a) Beräkna följande integral på två sätt, dels analytiskt och dels genom att tolka integralen som area.
   $$\int_0^3 |x-1|\,dx$$
   (b) Beräkna följande integral
   $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x + 2e^{-x} + 2} dx$$
3. (a) Bevisa olikheterna $1 \leq \int_0^1 3x^2\sqrt{1+x^4}\,dx \leq \sqrt{2}$.

   (b) Visa att integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1+\sqrt{x}}{x^2+\sqrt{|\sin x|}}\,dx$ är konvergent.

Temavecka 2: Användning av integraler. Kap 7.4 – 7.9

Avsnitt	Innehåll	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	Extra
Kap 7	Användning av integraler	1,3,4,9,14,17,24,31,38,47	2,7,11,20,25,28,30 32,40,42,48,49	54,55,66

Redovisningsuppgifter (redovisningsdag: 7 nov)

1. Skriv journal om temaveckans matematik.
2. Området som begränsas av y-axeln, linjen $y = 8$ och kurvan $y = x^3$ roterar kring x-axeln.
   (a) Beräkna rotationsvolymen.
   (b) Beräkna areorna av de rotationsytor som alstras
3. Låt $f(x)$ vara en funktion som är kontinuerlig och positiv på intervallet $(-\infty, \infty)$. Antag att $f(x)$ är växande på intervallet $(-\infty, 0)$, avtagande på intervallet $(0, \infty)$ och att $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ är konvergent. Visa att
   $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx - hf(0) \leq h\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nh) \leq \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx + hf(0)$
   för alla $h > 0$.

Temavecka 3: Differentialekvationer. Kap 8.1 – 8.6

Avsnitt	Innehåll	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	Extra
Kap 8.1 – 8.6	Differentialekvationer.	1,2,3,6bd,8b,23,25,34,38	9,17,18,19,24,26,28 29,32,35,40,41,42,44	33,37,45,74

Redovisningsuppgifter (redovisningsdag: 14 nov)

1. Skriv journal om temaveckans matematik.
2. Lös följande differentialekvationer
   (a) $3x^2y' = y^2 + 2xy - 2x^2,\ \ y(2) = -8$. (Tips: $z = \frac{y}{x}$ förenklar.)
   (b) $y''y^3 = 1,\ \ y(0) = y'(0) = 1$, genom att sätta $y' = p(y)$ och uttrycka y'' med $\frac{dp}{dy}$.
3. Bestäm ekvationen för den kurva som går genom punkten $(1, 1)$ och som är sådan att kurvans normal i punkten (x, y) går genom punkten $(y, 0)$.
4. En tank innehåller 60 liter rent vatten. Genom ett rör tillförs 2 liter saltlösning per minut, denna lösning innehåller 5 gram salt per liter lösning. Genom ett annat rör avtappas tre liter per minut, av den perfekt blandade vätskan i tanken. Tanken kommer alltså att vara tom efter exakt 1 timma. Bestäm saltmängden i tanken efter t minuter. Vad är den maximala saltmängden i tanken?

Temavecka 4: Differentialekvationer, samt system av differentialekvationer. Kap 8.7 – 8.9, samt stencil om system av differentialekvationer (SDE)

Avsnitt	Innehåll	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	Extra
Kap 8	Differentialekvationer	47,48,50,55,68	49bd,51bd,52,56de,57,62 63abc,65,66,69,70,71b	73,75
SDE	System av D.E.	1	3,4	

Redovisningsuppgifter (redovisningsdag: 21 nov)

1. Skriv journal om temaveckans matematik.
2. Lös följande differentialekvationer.
   (a) $y''' + 3y'' + y' - 5y = 0\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 2,\ \lim_{t\to\infty} y(t) = 0$
   (b) $y'' + 2y' + 5y = 26\sin(3t),\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$
3. Lös följande system av differentialekvationer där $x = x(t)$ och $y = y(t)$.
$$\begin{cases} 5x' + 2x - 6y' + 3y &= 4t + 2\cos(t) + 4\sin(t) \\ 3x' - 2x - 6y' + 9y &= 4t + 6\cos(t) + 4\sin(t) \\ x(0) = y(0) = 0 \end{cases}$$
4. Vid sönderfall av en atom av ett radioaktivt ämne A bildas en atom av ett annat radioaktivt ämne B. Detta ämne sönderfaller i sin tur till ett stabilt ämne C. Sönderfallshastigheten, dvs antalet sönderfallande atomer per tidsenhet, antages för båda ämnena vid varje tidpunkt vara proportionellt mot antalet just då existerande atomer av respektive ämne. Inför lämpliga beteckningar och gör de antaganden som du anser behövs och härled uttryck för antalet atomer av de radioaktiva ämnena (som funktioner av tiden).

Temavecka 5: Kurvskaror och differensekvationer. Stencil om kurvskaror (KS) och differensekvationer (DE).

Avsnitt	Innehåll	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	Extra
Kap KS	Kurvskaror	1a	1ce	1bf,2.
Kap DE	Differensekvationer	1a,2b,3a	1be,2d,3de,4,7	8,9,10

Redovisningsuppgifter (redovisningsdag:28 nov)

1. Skriv journal om temaveckans matematik.
2. Bestäm ortogonalkurvorna till kurvskaran $(C - x^2)y = C + x^2$.
3. En viss skalbaggsart lever i (högst) tre år. På hösten lägger de ägg som kläcks följande vår. Under sommaren utvecklas larverna till skalbaggar. Dessa blir könsmogna först andra året då de lägger ägg på hösten, detta gör de även det tredje året (om de lever så länge).

   Antalet nya individer bestäms huvudsakligen av antalet honor. För att få en uppfattning hur antalet kommer att variera räknar man honorna och åldersbestämmer dem. Man kommer då fram till att en åttondedel av årets nya honor kommer att överleva till nästa år (baggens andra år). Under detta år lägger de ägg och ger upphov till i medeltal 6.5 döttrar. En fjärdedel av de ettåriga kommer att överleva till nästa år (baggens tredje år). De ger i medeltal upphov till ytterligare sex döttrar.

   Kalla antalet årshonor år n för x_n, antalet ettåriga honor y_n och antalet tvååriga honor z_n. Ställ upp ett system av differensekvationer som beskriver ovanstående samband. Lös systemet då $x_0 = y_0 = z_0 = 1000$. Hur ser lösningen ut för stora n?

Temavecka 6: Taylorutveckling. Kap. 9

Avsnitt	Innehåll	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	Extra
Kap 9	Taylorutveckling	1,4,6,8,23,28,37	9,13,15,19,24,26,27,29,30,31,32,38abce	33,34

Redovisningsuppgifter (redovisningsdag: 5 dec)

1. Skriv journal om temaveckans matematik.
2. Funktionen $y(t)$ är lösning till differentialekvationen $y' = \frac{1}{4}\sqrt{2t^2 + y^2}$, $y(1) = 0$. Bestäm Taylorpolynomet av grad tre i punkten $t = 1$ till $y(t)$. (Tips: kanske det blir enklare om du kvadrerar ekvationen före derivering.)
   Låt Matlab rita en figur som innehåller differentialekvationens riktningsfält i området $1 \leq t \leq 10$, $0 \leq y \leq 30$, den lösning som ges av `ODE45` på intervallet $1 \leq t \leq 10$, samt grafen till taylorpolynomet på samma intervall. Redovisa med bilden där ni skrivit in namn på kurvorna.
3. För vilka rella tal α och β är den generaliserade integralen $\int_0^1 \frac{(\tan(x)-x)^\alpha}{x^\beta} dx$ konvergent. (Ledning: Maclaurinutveckling kan underlätta.)