Tentamen i Envariabelanalys, del B, för M1/TD1, 02-03-09
Lösningar

1. (a) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0}(e^{x^2}\sin x - x)/x^3$.
Vi använder Taylorutvecklingarna $e^{x^2} = 1 + x^2 + x^4 B(x)$, $\sin x = x - x^3/6 + x^5 C(x)$, där B och C är begränsade nära 0. Efter insättning och förenkling får vi
$$\frac{e^{x^2}\sin x - x}{x^3} = 1 - \frac{1}{6} + x^2 D(x),$$
där D är begränsad nära 0. Gränsvärdet blir då $1 - 1/6 = 5/6$.
Svar: $5/6$.

(b) I talföljden $y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots$ är $y_0 = y_1 = 0$. De övriga talen i följden får man genom upprepad användning av ekvationen $y_{n+2} = 3y_{n+1} - 2y_n + 1$. Beräkna y_{100}.
Motsvarande homogena ekvation $y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 0$ har karakteristiska polynomet $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ och alltså lösningarna $y_n = A + B2^n$. Eftersom högerledet 1 löser homogena ekvationen söker vi en partikulärlösning på formen $y_n = Cn$. Insättning i ekvationen, $C(n+2) - 3C(n+1) + 2Cn = 1$, ger $C = -1$, så $y_n = A + B2^n - n$. Begynnelsevillkoren $y_0 = A + B = 0$, $y_1 = A + 2B - 1 = 0$ ger slutligen $A = -1$, $B = 1$. Alltså är $y_n = 2^n - n - 1$ och speciellt $y_{100} = 2^{100} - 101$.
Svar: $2^{100} - 101$.

2. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Ge kortfattade men tydliga motiveringar till ditt svar.

(a) För att man skall kunna integrera en funktion måste den vara kontinuerlig.
Falskt. Exempelvis kan trappfunktioner integreras.

(b) Integralkalkylens medelvärdessats är användbar till att beräkna integraler. (Exakt, inte numerisk, beräkning avses.)
Falskt. Medelvärdessatsen ger ett samband mellan integralen och en punkt ξ i integrationsintervallet, men då vi inte känner ξ ger detta ingen kunskap om integralens exakta värde.

(c) Nedanstående kalkyl är korrekt:
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_{-R}^{R} = \lim_{R\to\infty} 0 = 0.$$
Falskt. Eftersom
$$\int_0^{\infty}\frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2}\ln(1+R^2) = \infty$$
är den givna integralen divergent. Den första steget i kalkylen är därmed felaktigt.

3. En metallplatta beskrivs av den halva cirkelskiva i xy-planet där $x^2 + y^2 \le 1$ och $y \ge 0$. I en punkt på plattan med koordinaterna (x, y) är densiteten y^3 gram/areaenhet. Beräkna plattans massa. Använda primitiva funktioner skall härledas, dvs enbart hänvisning till formelsamling räcker inte. **Ledning:** Tänk dig att du delar in området i tunna strimlor parallella med x-axeln och sedan låter strimlornas tjocklek gå mot 0.
En strimla med tjocklek Δy nära $(0, y)$ kan approximeras med en rektangel med bredden $2\sqrt{1-y^2}$ och konstant densitet y^3. En sådan rektangel har massan $2y^3\sqrt{1-y^2}\Delta y$. Vi kan därmed approximera plattans massa med en Riemannsumma
$$\sum_i 2y_i^3\sqrt{1-y_i^2}\,\Delta y$$
som enligt satsen om Riemannsummor konvergerar mot integralen
$$2\int_0^1 y^3\sqrt{1-y^2}\,dy$$
då Δy går mot 0. Plattans massa ges alltså av denna integral, som vi beräknar med ett variabelbyte:
$$2\int_0^1 y^3\sqrt{1-y^2}\,dy = \begin{pmatrix} t = 1-y^2 \\ dt = -2ydy \end{pmatrix} = -\int_1^0 (1-t)\sqrt{t}\,dt = \left[\frac{2}{5}t^{5/2} - \frac{2}{3}t^{3/2}\right]_1^0 = \frac{4}{15}.$$
Svar: Plattan väger $4/15$ gram, varken mer eller mindre.

4. Kurvan $y = (x^2-1)^2$, $1 \le x \le 2$, samt intervallet $0 \le x \le 1$ på x-axeln roterar runt y-axeln och bildar då en 9 meter djup bassäng (vi antar att längdenheten på båda koordinataxlarna är meter och att y-axeln pekar uppåt).

(a) Bestäm vattenvolymen då bassängen fylls till ett djup av y meter ($0 \le y \le 9$).

Vi använder "skivformeln". En skiva på höjden $y = t$ har radien r, där $t = (r^2-1)^2$, ger $r^2 = 1+\sqrt{t}$. Skivans area är då $\pi(1+\sqrt{t})$ och den sökta volymen

$$\int_0^y \pi(1+\sqrt{t})\,dt = \pi\left(y + \frac{2}{3}y^{3/2}\right).$$

Svar: Volymen är $\pi(y+2y^{3/2}/3)$ kubikmeter.

(b) Bassängen har ett avlopp i botten, och då detta öppnas rinner vattnet ut enligt Torricellis lag, dvs volymsminskningen är proportionell mot kvadratroten ur vattendjupet. Om bassängen fylls med vatten och avloppet öppnas töms bassängen på 1 timme. Man vill nu istället fylla bassängen med vatten och sedan öppna avloppet samtidigt som vatten tillförs med konstant hastighet. Hur snabbt skall man fylla på vatten för att bassängen skall fortsätta att vara full utan att svämma över?

Vi börjar med att studera den första situationen. Låt $y(t)$ vara vattendjupet i meter t timmar efter att avloppet öppnas. Med användning av deluppgift (a) kan vi skriva Torricellis lag som

$$V'(t) = \pi\frac{d}{dt}\left(y(t) + \frac{2}{3}y(t)^{3/2}\right) = -k\sqrt{y(t)},$$

dvs

$$\pi\, y'(t)\left(1+\sqrt{y(t)}\right) = -k\sqrt{y(t)}.$$

Detta är en separabel ekvation som kan lösas enligt

$$\int\left(\frac{1}{\sqrt{y}}+1\right)dy = -\int\frac{k}{\pi}\,dt, \quad \text{ger} \quad 2\sqrt{y}+y = C - \frac{k}{\pi}t.$$

Det finns ingen anledning att lösa ut y, istället stoppar vi i in $t=0$ och $y=9$, ger $C = 2\sqrt{9}+9 = 15$, och därefter $t=1$ och $y=0$, ger $k = C\pi = 15\pi$.

Vi övergår nu till den andra situationen. Om A kubikmeter vatten i timmen tillförs gäller att

$$V'(t) = -15\pi\sqrt{y(t)} + A.$$

Vi vill avgöra när $y(t) = 9$ är en lösning. Insättning ger $0 = -15\pi\sqrt{9}+A$, dvs $A = 45\pi$.

Svar: Man måste tillföra 45π kubikmeter vatten i timmen.

5. Metoden med integrerande faktor går ut på att multiplicera en första ordningens linjär ekvation med något som gör att vänsterledet blir derivatan av en produkt. När finns en liknande metod för andra ordningens linjära ekvationer? Dvs ange villkor på a och b som garanterar att ekvationen

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = g(x)$$

kan multipliceras med en faktor så att vänsterledet blir en andraderivata av formen $(y(x)c(x))''$. Ge ett exempel på en differentialekvation som kan lösas med metoden, och lös slutligen denna. I ditt exempel får inte a vara en konstant funktion.

Vi söker funktioner c och d med

$$d(y''+ay'+b) = (cy)'' = cy'' + 2c'y' + c''y,$$

vilket ger

$$d = c, \qquad ad = 2c', \qquad bd = c''.$$

De första två ekvationerna ger $a/2 = c'/c$, dvs $c = e^{A/2}$ med A en primitiv funktion till a (egentligen $c = \pm e^{A/2}$, men vi vill bara hitta en integrerande faktor). Insättning i den tredje ekvationen ger

$$bc = c'' = \left(\frac{a}{2}e^{A/2}\right)' = \left(\frac{a'}{2}+\frac{a^2}{4}\right)e^{A/2} = \left(\frac{a'}{2}+\frac{a^2}{4}\right)c.$$

Vi får alltså villkoret

$$b = \frac{a'}{2}+\frac{a^2}{4}.$$

Våra räkningar visar att om detta är uppfyllt är den givna ekvationen ekvivalent med

$$(ye^{A/2})'' = ge^{A/2}.$$

För att ge ett exempel väljer jag $a = x$ och $g = 0$, vilket ger $b = 1/2 + x^2/4$. Med $A = x^2/2$ har vi att ekvationen

$$y'' + xy' + \left(\frac{1}{2} + \frac{x^2}{4}\right) y = 0$$

är ekvivalent med

$$(ye^{x^2/2})'' = 0$$

och därmed har allmänna lösningen $y(x) = (Cx + D)e^{-x^2/2}$.