Matematik, Chalmers

Tentamen i Envariabelanalys, del B, för M1/TD1
02-03-09, kl 8.45 – 12.45.

Kurs: TMA081 del B **Hjälpmedel:** Alla hjälpmedel tillåtna. Valfri räknare (dock ej dator), läroböcker, anteckningar, penna mm.

Telefon: Mikael Persson

Enbart svar till en uppgift ger inga poäng, fullständig lösning krävs alltid. För godkänt på tentamen krävs minst 12 poäng. Skriv linje, inskrivningsår, namn och personnummer på skrivningsomslaget. Skriv personnummer på samtliga inlämnade blad. Sortera uppgifterna i ordning och numrera sedan bladen löpande.

---

1. (a) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}\sin x - x}{x^3}$. (3p)

   (b) I talföljden $y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots$ är $y_0 = y_1 = 0$. De övriga talen i följden får man genom upprepad användning av ekvationen
   $$y_{n+2} = 3y_{n+1} - 2y_n + 1.$$
   Beräkna y_{100}. (3p)

2. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Ge kortfattade men tydliga motiveringar till ditt svar.

   (a) För att man skall kunna integrera en funktion måste den vara kontinuerlig. (2p)

   (b) Integralkalkylens medelvärdessats är användbar till att beräkna integraler. (Exakt, inte numerisk, beräkning avses.) (2p)

   (c) Nedanstående kalkyl är korrekt:
   $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_{-R}^{R} = \lim_{R\to\infty} 0 = 0.$$
   (2p)

3. En metallplatta beskrivs av den halva cirkelskiva i xy-planet där $x^2 + y^2 \leq 1$ och $y \geq 0$. I en punkt på plattan med koordinaterna (x, y) är densiteten y^3 gram/areaenhet. Beräkna plattans massa. Använda primitiva funktioner skall härledas, dvs enbart hänvisning till formelsamling räcker inte.
   Ledning: Tänk dig att du delar in området i tunna strimlor parallella med x-axeln och sedan låter strimlornas tjocklek gå mot 0. (6p)

4. Kurvan $y = (x^2 - 1)^2$, $1 \leq x \leq 2$, samt intervallet $0 \leq x \leq 1$ på x-axeln roterar runt y-axeln och bildar då en 9 meter djup bassäng (vi antar att längdenheten på båda koordinataxlarna är meter och att y-axeln pekar uppåt).

   (a) Bestäm vattenvolymen då bassängen fylls till ett djup av y meter ($0 \leq y \leq 9$). (2p)

   (b) Bassängen har ett avlopp i botten, och då detta öppnas rinner vattnet ut enligt Torricellis lag, dvs volymsminskningen är proportionell mot kvadratroten ur vattendjupet. Om bassängen fylls med vatten och avloppet öppnas töms bassängen på 1 timme. Man vill nu istället fylla bassängen med vatten och sedan öppna avloppet samtidigt som vatten tillförs med konstant hastighet. Hur snabbt skall man fylla på vatten för att bassängen skall fortsätta att vara full utan att svämma över? (4p)

5. Metoden med integrerande faktor går ut på att multiplicera en första ordningens linjär ekvation med något som gör att vänsterledet blir derivatan av en produkt. När finns en liknande metod för andra ordningens linjära ekvationer? Dvs ange villkor på a och b som garanterar att ekvationen
   $$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = g(x)$$
   kan multipliceras med en faktor så att vänsterledet blir en andraderivata av formen $(c(x)y(x))''$. Ge ett exempel på en differentialekvation som kan lösas med metoden, och lös slutligen denna. I ditt exempel får inte a vara en konstant funktion. (6p)

Lycka till!
Hjalmar