Tentamen i Envariabelanalys del B för M1/TD1, 02-08-23
Lösningar

1. Lös differentialekvationen $x^2y'(x) = 2x\,y(x) + y(x)^2$, $y(1) = 1$; (a) genom att införa funktionen $z(x) = y(x)/x^2$, (b) genom att införa funktionen $z(x) = 1/y(x)$.
För del (a) stoppar vi in $y = x^2z$, $y' = 2xz + x^2z'$ i ekvationen; ger efter förenkling

$$z' = z^2 \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{dz}{z^2} = \int dx \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{z(x)} = x + C.$$

Stoppar vi in $x = 1$, $z(1) = y(1)/1^2 = 1$ får vi $C = -2$, ger $z(x) = 1/(2-x)$ och $y(x) = x^2z(x) = x^2/(2-x)$.
För del (b) stoppar vi in $y = 1/z$, $y' = -z'/z^2$, ger efter förenkling

$$z' + \frac{2}{x}\,z = -\frac{1}{x^2}.$$

Här har vi den integrerande faktorn $e^{2\ln(x)} = x^2$. Ekvationen kan alltså skrivas

$$(x^2z)' = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2z(x) = -x + C.$$

Stoppar vi in $x = 1$ och $z(1) = 1/y(1) = 1$ får vi $C = 2$, ger $z(x) = (2-x)/x^2$ och $y(x) = 1/z(x) = x^2/(2-x)$.
Svar: Ekvationen har lösningen $y(x) = x^2/(2-x)$.

2. (a) Beräkna, för varje värde på konstanten a, Taylorpolynomet av grad 4 i punkten $x = 0$ till funktionen $f(x) = (1+x^2)^a - x^2e^x$. (b) För vilka värden på a har f ett lokalt minimum i 0?
Vi använder standardutvecklingarna

$$(1+t)^a = 1 + at + \frac{a(a-1)}{2}\,t^2 + t^3B_1(t),$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + t^3B_2(t),$$

där B_1 och B_2 är begränsade nära 0. Dessa ger

$$f(x) = 1 + (a-1)x^2 - x^3 + \frac{a^2-a-1}{2}\,x^4 + x^5B_3(x),$$

med B_3 begränsad nära 0. Enligt entydighetssatsen är detta den sökta Taylorutvecklingen.
För del (b) skriver vi om f som

$$f(x) = 1 + x^2\left((a-1) + xB_4(x)\right),$$

med B_4 begränsad nära 0. Om $a > 1$ är parentesen positiv nära 0, så att $f(x) \geq 1 = f(0)$ för x nära 0, dvs 0 är då ett lokalt minimum. Om $a < 1$ har vi på samma sätt ett lokalt maximum. Om $a = 1$ skriver vi

$$f(x) = 1 - x^3 - \frac{1}{2}\,x^4 + x^5B_3(x) = 1 - x^3\left(1 + xB_5(x)\right),$$

där B_5 föga oväntat betecknar en funktion som är begränsad nära 0. Återigen är parentesen positiv för x nära 0, vilket medför att f växlar tecken i 0, dvs 0 är varken lokalt max eller lokalt min.
Svar: Taylorutvecklingen är $f(x) = 1 + (a-1)x^2 - x^3 + \frac{a^2-a-1}{2}\,x^4 + x^5B(x)$; funktionen har ett lokalt minimum i 0 om och endast om $a > 1$.

3. En termitstack har formen av ett halvklot med radie 1 meter. Den vilar på marken med den flata sidan nedåt. Termitforskaren Olle finner genom stickprov att antalet termiter i stacken främst beror på avståndet till markplanet. Närmare bestämt verkar det som om det t meter från marken finns cirka $2 - t^2$ termiter per kubikcentimeter. Hjälp Olle beräkna det totala antalet termiter i stacken!
Vi delar in stacken i vågräta skivor med höjden Δt. En skiva på höjden t meter från marken har radien

$\sqrt{1-t^2}$ och därmed volymen $\pi(1-t^2)\Delta t\ \mathrm{m}^3$. Den innehåller alltså cirka $10^6\pi(2-t^2)(1-t^2)\Delta t$ (observera att $1\,\mathrm{m}^3 = 10^6\,\mathrm{cm}^3$) termiter. Om vi låter Δt gå mot 0 får vi att totala antalet termiter är

$$\pi 10^6 \int_0^1 (2-t^2)(1-t^2)\,dt = \frac{6\pi 10^6}{5}.$$

Svar: $(6\pi 10^6)/5$ eller cirka $3,8$ miljoner termiter.

4. En bassäng har formen av den yta som bildas då kurvan $y = x^2$ roterar kring y-axeln. Vi antar att längdenheten på koordinataxlarna är meter och att y-axeln pekar uppåt. (a) Beräkna vattenvolymen då bassängen fylls till ett djup av t meter. (b) Man börjar fylla på den tomma bassängen med den konstanta hastigheten $1\ \mathrm{m}^3/\mathrm{h}$. På grund av avdunstning stabiliserar sig vattenvolymen på $4\ \mathrm{m}^3$, dvs då vattnets volym är $4\ \mathrm{m}^3$ är avdunstningen $1\ \mathrm{m}^3/\mathrm{h}$. Vid vilken tidpunkt är vattnets volym $2\ m^3$? Vi antar att avdunstningen är proportionell mot vattenytans area.

(a) Vi använder “skivformeln” för integration. En skiva på höjden $y = s$ har radien $x = \sqrt{s}$ och alltså arean $\pi x^2 = \pi s$. Volymen blir då

$$\int_0^t \pi s\,ds = \frac{\pi t^2}{2}.$$

(b) Låt $V(t)$ beteckna vattenvolymen i kubikmeter efter t timmar. Vi skriver $V'(t) = V'_{\text{in}} - V'_{\text{ut}}$, där $V'_{\text{in}} = 1$. Avdunstningen V'_{ut} är proportionell mot vattenytans area, vilken enligt (a)-uppgiften är proportionell mot $\sqrt{V}$. Man har alltså differentialekvationen

$$V' = 1 - C\sqrt{V}.$$

Vidare vet vi att $C\sqrt{V} = 1$ då $V = 4$, ger $C = 1/2$. Vi löser nu ekvationen:

$$\begin{aligned}
V' = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{V} \quad &\Leftrightarrow \quad \int \frac{dV}{1-\sqrt{V}/2} = \int dt \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} V = 4u^2 \\ dV = 8u\,du \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad t = \int \frac{8u}{1-u}\,du = \int \left(-8 + \frac{8}{1-u}\right) du = -8u - 8\ln|1-u| + C \\
&\qquad\quad = -4\sqrt{V} - 8\ln\left|1 - \frac{1}{2}\sqrt{V}\right| + C.
\end{aligned}$$

Vi stoppar in $t = 0$ och $V = 0$, ger $C = 0$. Vi stoppar sedan in $V = 2$, ger $t = -4\sqrt{2} - 8\ln(1 - \sqrt{2}/2)$.

Svar: Den sökta volymen är $\pi t^2/2$, den sökta tidpunkten efter $-4\sqrt{2} - 8\ln(1-\sqrt{2}/2)$ timmar eller cirka 4 timmar och 10 minuter.

5. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska. Ge kortfattade men tydliga motiveringar, om påståendet är falskt lämpligen i form av ett motexempel. (a) Om funktionen f är integrerbar så är funktionen $S(x) = \int_0^x f(t)dt$ deriverbar. (b) Om f är integrerbar och $S(x) = \int_0^x f(t)dt$ är deriverbar så är $S'(x) = f(x)$.

Enligt analysens huvudsats är båda påståendena sanna om f är kontinuerlig. Vi behöver alltså endast intressera oss för fallet då f är diskontinuerlig. Om man studerar vad som händer för några enkla diskontinuerliga funktioner hittar man med lite tur och/eller skicklighet motexempel till båda påståendena.

För (a) kan vi till exempel välja

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Då är

$$S(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x, & x > 0. \end{cases}$$

Denna funktion är ej deriverbar för $x = 0$ och vi har ett motexempel.

För (b) kan vi till exempel välja

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \ne 1, \\ 17, & x = 1. \end{cases}$$

Då är $S(x) = 0$ för alla x och alltså även $S'(x) = 0$ för alla x. Eftersom $S'(1) \ne f(1)$ har vi ett motexempel.

Svar: Båda påståendena är falska.