Matematik, Chalmers

Tentamen i Envariabelanalys, del B, för M1/TD1
02-08-23, kl 8.45 – 12.45.

Kurs: TMA081 del B **Hjälpmedel:** Alla hjälpmedel tillåtna. Valfri räknare (dock ej dator), läroböcker, anteckningar mm.

Telefon: Fredrik Altenstedt

Enbart svar till en uppgift ger inga poäng, fullständig lösning krävs alltid. För godkänt på tentamen krävs minst 12 poäng. Skriv linje, inskrivningsår, namn och personnummer på skrivningsomslaget. Skriv personnummer på samtliga inlämnade blad. Sortera uppgifterna i ordning och numrera sedan bladen löpande.

---

1. Lös differentialekvationen

$$x^2 y'(x) = 2x\, y(x) + y(x)^2, \qquad y(1) = 1,$$

   (a) genom att införa funktionen $z(x) = y(x)/x^2$, (3p)

   (b) genom att införa funktionen $z(x) = 1/y(x)$. (3p)

2. (a) Beräkna, för varje värde på konstanten a, Taylorpolynomet av grad 4 i punkten $x = 0$ till funktionen

$$f(x) = (1 + x^2)^a - x^2 e^x.$$

   (2p)

   (b) För vilka värden på a har f ett lokalt minimum i 0? (4p)

3. En termitstack har formen av ett halvklot med radie 1 meter. Den vilar på marken med den flata sidan nedåt. Termitforskaren Olle finner genom stickprov att antalet termiter i stacken främst beror på avståndet till markplanet. Närmare bestämt verkar det som om det t meter från marken finns cirka $2 - t^2$ termiter per kubikcentimeter. Hjälp Olle beräkna det totala antalet termiter i stacken! (6p)

4. En bassäng har formen av den yta som bildas då kurvan $y = x^2$ roterar kring y-axeln. Vi antar att längdenheten på koordinataxlarna är meter och att y-axeln pekar uppåt.

   (a) Beräkna vattenvolymen då bassängen fylls till ett djup av t meter. (2p)

   (b) Man börjar fylla på den tomma bassängen med den konstanta hastigheten $1\ \mathrm{m}^3/\mathrm{h}$. På grund av avdunstning stabiliserar sig vattenvolymen på $4\ \mathrm{m}^3$, dvs då vattnets volym är $4\ \mathrm{m}^3$ är avdunstningen $1\ \mathrm{m}^3/\mathrm{h}$. Vid vilken tidpunkt är vattnets volym $2\ \mathrm{m}^3$? Vi antar att avdunstningen är proportionell mot vattenytans area. (4p)

5. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska. Ge kortfattade men tydliga motiveringar, om påståendet är falskt lämpligen i form av ett motexempel.

   (a) Om funktionen f är integrerbar så är funktionen $S(x) = \int_0^x f(t)dt$ deriverbar. (3p)

   (b) Om f är integrerbar och $S(x) = \int_0^x f(t)dt$ är deriverbar så är $S'(x) = f(x)$. (3p)

   Anmärkning: Med integrerbar menas här att Riemannintegralen över varje ändligt intervall existerar. Med deriverbar menas att funktionens derivata existerar i varje punkt.

Lycka till!
Hjalmar