Tentamen i Envariabelanalys del B för M1/TD1, 03-01-14
Lösningar

1. (a) Ett snöoväder börjar klockan 8.00 och slutar klockan 10.00. Vid en tidpunkt t timmar efter klockan 8.00 ($0 \leq t \leq 2$) faller $3(1-(t-1)^2)$ centimeter snö per timme. Hur mycket snö faller totalt under ovädret?
Den givna funktionen är snöytans "hastighet", totala snöfallet dess "förflyttning" som ges av integralen
$$\int_0^2 3(1-(t-1)^2)\,dt = \left[3t-(t-1)^3\right]_0^2 = 4\,\text{cm}.$$
(b) Efter att ovädret slutat börjar snön smälta med en hastighet proportionell mot kvadratroten ur snödjupet. Klockan 11.00 är snödjupet 2 centimeter. Hur dags har all snö smält bort? Vi antar att ingen snö fanns på marken innan ovädret, dvs det ursprungliga snödjupet ges av svaret i (a).
Låt $y(t)$ beteckna snödjupet i centimeter t timmar efter klockan 10.00. Då är
$$\frac{dy}{dt} = -C\sqrt{y} \quad\Leftrightarrow\quad \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = -C\int dt \quad\Leftrightarrow\quad 2\sqrt{y} = -Ct + D.$$
Vi stoppar in $t=0$ och $y=4$, ger $D=4$. Stoppa sedan in $t=1$ och $y=2$, ger $C = 4-2\sqrt{2}$. Slutligen har vi att $y=0$ då $t = D/C = 4/(4-2\sqrt{2}) \approx 3,41\,\text{h} \approx 3\,\text{h}\,25\,\text{min}$.
Svar: (a) 4 cm, (b) sisådär klockan 13.25.

2. Lös differentialekvationen $xy'' + (2x+1)y' + (x+1)y = e^{-x}$, $x > 0$ genom att ansätta $z(x) = e^x y(x)$.
Upprepad derivering av $y = ze^{-x}$ ger $y' = (z'-z)e^{-x}$, $y'' = (z''-2z'+z)e^{-x}$. Stoppar man in detta får man efter förenkling $xz'' + z' = 1$. Genom att sätta $z' = w$ och använda metoden med integrerande faktor eller genom att direkt känna igen vänsterledet som derivatan av en produkt får vi
$$(xz')' = 1 \quad\Leftrightarrow\quad xz' = x + C \quad\Leftrightarrow\quad z' = 1 + \frac{C}{x} \quad\Leftrightarrow\quad z = x + C\ln x + D,$$
där vi använde att $x > 0$ i sista steget.
Svar: Allmänna lösningen är $y(x) = (x + C\ln x + D)e^{-x}$.

3. Låt $f(x) = \arctan(x)/(1-x^2)$. (a) Beräkna, utan omfattande räkningar, femtederivatan $f^{(5)}(0)$. (b) Visa att det finns ett tal $\epsilon > 0$ så att $f(x) > \frac{1}{2}\sin(2x)$, $0 < x < \epsilon$.
Eftersom båda uppgifterna handlar om det lokala uppförandet nära 0 är det lämpligt att Taylorutveckla f kring 0. Kända standardutvecklingar ger
$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + x^7B_1(x)\right)\left(1 + x^2 + x^4 + x^6B_2(x)\right) \\ &= x + \left(1-\frac{1}{3}\right)x^3 + \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)x^5 + x^7B_3(x) = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{13}{15}x^5 + x^7B_3(x); \end{aligned}$$
här och nedan är funktionerna B_i är begränsade nära 0.
(a) Enligt entydighetssatsen för Taylorutvecklingar är koefficienten framför x^5 lika med $f^{(5)}(0)/5!$, dvs $f^{(5)}(0) = 5! \cdot 13/15 = 2\cdot 4\cdot 13 =$ antalet kort i 2 kortlekar $= 104$.
Svar: 104.
(b)Vi använder Taylorutvecklingen
$$\frac{1}{2}\sin(2x) = \frac{1}{2}\left(2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} + x^7B_4(x)\right) = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + x^7B_5(x),$$
vilket ger
$$f(x) - \frac{1}{2}\sin(2x) = \frac{11}{15}x^5 + x^7B_6(x) = x^5\left(\frac{11}{15} + x^2B_6(x)\right).$$
Vi ser att olikheten gäller om $x > 0$ och $x^2B_6(x) > -11/15$, vilket är sant för x tillräckligt nära 0 eftersom B_6 är begränsad där.

4. Betrakta den generaliserade integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^x}{(1+e^x)^2}\right)^a dx.$$

(a) För vilka värden på konstanten a är integralen konvergent? (b) Välj själv ett värde på a som gör integralen konvergent och beräkna integralen i detta fall. Enbart hänvisning till formelsamling eller miniräknare ger inga poäng.

Vi gör först variabelbytet $t = e^x$, ger

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^x}{(1+e^x)^2}\right)^a dx = \int_0^{\infty} \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{2a}}\, dt.$$

(a) En “slarvig” jämförelse med potensfunktioner ger att integranden är ungefär t^{a-1} nära 0 och $t^{a-1}/t^{2a} = t^{-a-1}$ för stora t. I båda fallen är villkoret för konvergens $a > 0$. För en mer nogrann undersökning delar vi in intervallet i $0 < t < 1$ samt $t > 1$ och gör uppskattningarna

$$\frac{t^{a-1}}{(1+1)^{2a}} < \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{2a}} < \frac{t^{a-1}}{(1+0)^{a}}, \qquad 0 < t < 1,$$

$$\frac{t^{a-1}}{(t+t)^{2a}} < \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{2a}} < \frac{t^{a-1}}{(0+t)^{2a}}, \qquad t > 1,$$

vilket ger att integralen är konvergent om och endast om båda integralerna

$$\int_0^1 t^{a-1}\, dt \quad \text{och} \quad \int_1^{\infty} t^{-a-1}\, dt$$

är det, dvs då $a > 0$.

(b) Väljer man $a = 1$ får man

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+t)^2}\, dt = \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{1}{1+t}\right]_0^R = 1.$$

Svar: (a) $a > 0$, (b) $a = 1$ ger värdet 1 (mer allmänt är värdet $((a-1)!)^2/(2a-1)!$ om a är ett positivt heltal).

5. Den generaliserade medelvärdessatsen för integraler säger att om f och g är kontinuerliga och $g(x) \geq 0$ i ett intervall $[a, b]$, så finns ett tal $\xi \in [a, b]$ så att $\int_a^b f(x)g(x)\, dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\, dx$.

(a) Ge ett motexempel som visar att ett sådant tal ξ inte nödvändigtvis existerar om f enbart är integrerbar, ej kontinuerlig.

Svar: Tag tex $a = -1$, $b = 1$, $g(x) = 1$ för alla x och

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 0, \\ 37, & x = 0. \end{cases}$$

Vänsterledet blir då 0 och högerledet $2f(\xi)$ vilket aldrig är 0. (Idén är att införa en diskontinuitet som “hoppar över” funktionens medelvärde i intervallet.)

(b) Ge ett motexempel som visar att ett sådant tal ξ inte nödvändigtvis existerar om g antar både positiva och negativa värden i intervallet.

Svar: Tag tex $a = -1, b = 1$ och $f(x) = g(x) = x$. Vänsterledet blir då positivt och högerledet 0.