Matematik, Chalmers

Tentamen i Envariabelanalys, del B, för M1/TD1
03-01-14, kl 14.15 – 18.15.

Kurs: TMA081 del B **Hjälpmedel:** Alla hjälpmedel tillåtna. Valfri räknare (dock ej dator), läroböcker, anteckningar mm.

Telefon: Rolf Liljendahl, 0740-459022.

Enbart svar till en uppgift ger inga poäng, fullständig lösning krävs alltid. För godkänt på tentamen krävs minst 12 poäng. Skriv linje, inskrivningsår, namn och personnummer på skrivningsomslaget. Skriv personnummer på samtliga inlämnade blad. Sortera uppgifterna i ordning och numrera sedan bladen löpande.

---

1. (a) Ett snöoväder börjar klockan 8.00 och slutar klockan 10.00. Vid en tidpunkt t timmar efter klockan 8.00 ($0 \leq t \leq 2$) faller $3(1-(t-1)^2)$ centimeter snö per timme. Hur mycket snö faller totalt under ovädret? (3p)

   (b) Efter att ovädret slutat börjar snön smälta med en hastighet proportionell mot kvadratroten ur snödjupet. Klockan 11.00 är snödjupet 2 centimeter. Hur dags har all snö smält bort? Vi antar att ingen snö fanns på marken innan ovädret, dvs det ursprungliga snödjupet ges av svaret i (a). (3p)

2. Lös differentialekvationen

$$xy'' + (2x+1)y' + (x+1)y = e^{-x}, \qquad x > 0$$

genom att ansätta $z(x) = e^x y(x)$. (6p)

3. Låt

$$f(x) = \frac{\arctan x}{1-x^2}.$$

   (a) Beräkna, utan omfattande räkningar, femtederivatan $f^{(5)}(0)$. (3p)

   (b) Visa att det finns ett tal $\epsilon > 0$ så att

$$f(x) > \frac{1}{2}\sin(2x), \qquad 0 < x < \epsilon.$$

(3p)

4. Betrakta den generaliserade integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^x}{(1+e^x)^2}\right)^a dx.$$

   (a) För vilka värden på konstanten a är integralen konvergent? (3p)

   (b) Välj själv ett värde på a som gör integralen konvergent och beräkna integralen i detta fall. Enbart hänvisning till formelsamling eller miniräknare ger inga poäng. (3p)

5. Den generaliserade medelvärdessatsen för integraler säger att om f och g är kontinuerliga och $g(x) \geq 0$ i ett intervall $[a,b]$, så finns ett tal $\xi \in [a,b]$ så att

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx.$$

   (a) Ge ett motexempel som visar att ett sådant tal ξ inte nödvändigtvis existerar om f enbart är integrerbar, ej kontinuerlig. (3p)

   (b) Ge ett motexempel som visar att ett sådant tal ξ inte nödvändigtvis existerar om g antar både positiva och negativa värden i intervallet. (3p)

Lycka till!
Hjalmar