MATEMATIK **Chalmers tekniska högskola**

Extrauppgifter i **Matematisk analys i en variabel M, del A och del B**, (TMA081).

Hej!
Jag har beslutat att ni som hade "oturen" att hamna på fel sida om gränsen till höjt totalbetyg för kursen **Analys i en variabel** (dvs. med 58 eller 59 poäng), skall få en chans till att få höjt betyg, dvs. 4:a. Det enda ni behöver göra är att lösa nedanstående 4 problem och redovisa för mig, inom 4 veckor, efter någon räkneövning på flervariabelkursen (sal ML.2) eller på annan överenskommen tid. Om uppgifterna upplevs som lite kluriga så tveka inte att ta kontakt med mig, för att kanske få något förklarat eller få lite hjälp på traven. LYCKA TILL !

1. Antag att α är ett rationellt tal och att β är ett irrationellt tal.
Red ut vilka kontinuerliga funktioner som uppfyller
$f(x+\alpha) = f(x)$ och $f(x+\beta) = f(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$.
(dvs. vilka kontinuerliga funktioner som har både perioden α och perioden β)

Tips: Visa först att $f(x + n\alpha + m\beta) = f(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$ och $n, m \in \mathbb{Z}$.
Visa sedan att det till varje $\epsilon > 0$ finns n och m sådana att $|n\alpha + m\beta| < \epsilon$
Detta är det svåra i uppgiften och följer av följande två delsteg:

i) Visa att det till varje $x \in \mathbb{R}$ och heltal $N > 1$,
existerar heltal h och k sådana att $0 < k \leq N$ och $|kx - h| < 1/N$.
(Tips: Visa att två av talen $tx - [tx], t = 0, 1, 2, ..., N$ skiljer sig med högst $1/N$.)

ii) Antag att $x \in \mathbb{R}$ är irrationellt. Visa att det finns oändligt många
rationella tal h/k, med $k > 0$, sådana att $|x - h/k| < 1/k^2$.
(Tips: Antag att det endast finns ändligt många, säg $h_1/k_1, ..., h_r/k_r$,
och erhåll en motsägelse genom att applicera i) ovan med $N > 1/\delta$,
där δ är det minsta av talen $|x - h_1/k_1|, ..., |x - h_r/k_r|$.)

Slutligen avgör vilka kontinuerliga funktioner f det finns som uppfyller att
det till varje $\epsilon > 0$ finns δ sådant att $0 < \delta < \epsilon$ och $f(x+\delta) = f(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

2. Antag att $f_n, n = 0, 1, 2, ...$ är en oändlig sekvens av reellvärda funktioner.
Om $f_n(x) \geq 0$ för alla $x > 0$ och $n \in \mathbb{N}$, så kan man visa att

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f_n(x)\, dx \right) = \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) dx$$

Ge nu istället exempel på en sekvens av funktioner sådana att

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f_n(x)\, dx \right) \neq \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) dx$$

Tips: Om du inte lyckas hitta något exempel på egen hand
(vilket kan vara svårt), så uppsök lämplig litteratur.

3. Låt Ω vara det område i xy-planet som består av alla (x, y) sådana att $\cos x \leq y \leq (x-\pi)^2$.
Om vi tänker oss xy-planet som en karta, där Ω representerar plan landyta och allt utanför Ω representerar hav. Vilket är då det kortaste gångavståndet mellan punkten $(-4, 0)$ och punkten $(4, 0)$ (om vattnet ej får vidröras).

Tips: Beskriv först den kurva γ med minst längd, som ligger helt i Ω och som går från punkten $(-4, 0)$ till punkten $(4, 0)$. Tag här hjälp av tex. matlab för att lösa eventuella ekvationer approximativt. Skriv sedan upp de integraler som tillsammans ger längden av γ och lös dem numeriskt med tex. matlab (vanlig kalkylator duger naturligtvis lika bra, när man väl har formulerat sin numeriska metod för att lösa ekvationerna respektive beräkna integralerna).

4. Studera vad som händer när man ändrar olika parametrar i svängningsekvationen
$my''(t) + dy'(t) + ky(t) = f(t)$ i enlighet med matlabövning 5.1. Lös ekvationen och förklara de fenomen som uppkommer, i enlighet med 5.1d (obs! Man får olika fall).

mvh. Thomas Hansson