CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
GÖTEBORGS UNIVERSITET
Matematiska Institutionen
Thomas Hansson

27th October 1998

Veckoprogram för kursen
Matematisk analys i en variabel M, del B, läsåret 1998/99

Jag antar att de flesta arbetsgrupperna har överlevt första läsperioden, men det kanske finns skäl att bilda en del nya så att alla grupper har 4 - 5 medlemmar. Ni skall givetvis bilda de arbetsgrupper som ni tror kommer att fungera bäst. Om du skall få glädje av detta sätt att arbeta så måste du själv vara aktiv. Du måste försöka lösa samtliga uppgifter. Arbetsgruppen måste samlas minst en gång för avstämning och gemensamt arbete. Målet är ju att ni skall komma fram till en lösning som ni alla tror på och att ni på vägen dit skall ge varandra idéer och kunskap. Det är viktigt att alla får arbetsro under hela lektionstiden. De arbetsgrupper som inte är sysselsatta med redovisning måste respektera detta och jobba individuellt eller i grupp och inte ägna tiden åt social verksamhet. Tiden är dyrbar, utnyttja den väl.

Temavecka 1:

Period: 27/10 – 2/11
Tema: Integraler och användning av integraler.
Avsnitt: Kap. 6, samt avsnitt 7.1 – 7.3.

Rekommenderade övningsuppgifter:

Instuderingsuppgiter: Kap.6: 1abd,2,3,4,9,11,25,46
Träningsuppgifter: Kap.6: 6,8,12,13,14,15bc,16bc,17bc,19b,21,27,30ab,40
Extra uppgifter: Kap.6: 18c,20b,22,32,34

Redovisningsuppgifter (redov. 2/11):

1. Beräkna följande integraler på två sätt, dels analytiskt och dels genom att tolka integralerna som areor.

   (a) $\displaystyle\int_0^3 |x-1|\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

2. Beräkna följande integraler

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^2+3x+2}dx$ (c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x+2}{(x+1)(x^2+2x+2)}dx$

   (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{e^x+2e^{-x}+2}dx$ (d) $\displaystyle\int_2^3 (2x-5)\ln(x-2)dx$

3. (a) Bevisa olikheterna $\displaystyle 1 \le \int_0^1 3x^2\sqrt{1+x^4}\,dx \le \sqrt{2}$.

   (b) Visa att integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1+\sqrt{x}}{x^2+\sqrt{|\sin x|}}\,dx$ är konvergent.

Temavecka 2:

Period: 2/11 – 9/11
Tema: Användning av integraler.
Avsnitt: Kap.7

Rekommenderade övningsuppgifter:

Instuderingsuppgiter: Kap.7: 1,3,4,9,14,17,24,31,38,47
Träningsuppgifter: Kap.7: 2,7,11,20,25,28,30,32,40,42,48,49
Extra uppgifter: Kap.7: 54,55,66

Redovisningsuppgifter (redov. 9/11):

1. Området som begränsas av y-axeln, linjen $y = 8$ och kurvan $y = x^3$ roterar kring x-axeln.
   (a) Beräkna rotationsvolymen.
   (b) Beräkna areorna av de rotationsytor som alstras
2. Betrakta kurvan som går från punkten $(-1, 0)$ till punkten $(1, 0)$ längs ellipsbågen
   $$x^2 + (ay)^2 = 1\ ,\ y \geq 0, \quad \text{där } a \in \mathbb{R}.$$
   (a) Skissa kurvan för olika värden på a.
   (b) Ange minst två olika parameterframställningar av kurvan.
   (c) Skriv upp en integral som ger längden av kurvan och beräkna längden av kurvan i fallet $a = 1$.
   (d) Beräkna den totala massan längs kurvan om kurvan är belagd med en massa med densiteten $|xy|$.
   (e) Skriv upp de integraler som ger tyngdpunkten för kurvan, om den är belagd med en massa enl. (c), och beräkna tyngdpunkten i fallet $a = 1$.
   (f) Beräkna krökningen av kurvan i punkten $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{a\sqrt{2}})$
3. Låt $f(x)$ vara en funktion som är kontinuerlig och positiv på intervallet $(-\infty, \infty)$. Antag att $f(x)$ är växande på intervallet $(-\infty, 0)$, avtagande på intervallet $(0, \infty)$ och att $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ är konvergent. Visa att
   $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx - hf(0) \leq h\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nh) \leq \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx + hf(0)$
   för alla $h > 0$.

Temavecka 3:

Period: 9/11 – 16/11
Tema: Differentialekvationer.
Avsnitt: Kap 8.1 – 8.6

Rekommenderade övningsuppgifter:

Instuderingsuppgiter: Kap.8: 1,2,3,6bd,8b,23,25,34,38
Träningsuppgifter: Kap.8: 9,17,18,19,24,26,28,29,32,35,40,41,42,44
Extra uppgifter: Kap.8: 33,37,45,74

Redovisningsuppgifter (redov. 16/11):

1. Lös följande differentialekvationer

   (a) $y'(x) = \dfrac{y - y^3}{x^3 + x} \quad y(1) = 3.$

   (b) $3x^2y' = y^2 + 2xy - 2x^2, \quad y(2) = -8.$

   (c) $(x^2 + 3x + 2)y' + y = x^2 - x - 6, \quad y(0) = 2.$

   (d) $y''y^3 = 1, \quad y(0) = y'(0) = 1$, genom att sätta $y' = p(y)$ och uttrycka y'' med $\frac{dp}{dy}$.

2. Bestäm ekvationen för den kurva som går genom punkten $(1, 1)$ och som är sådan att kurvans normal i punkten (x, y) går genom punkten $(y, 0)$.

3. En tank innehåller 60 liter rent vatten. Genom ett rör tillförs 2 liter saltlösning per minut, denna lösning innehåller 5 gram salt per liter lösning. Genom ett annat rör avtappas tre liter per minut, av den perfekt blandade vätskan i tanken. Tanken kommer alltså att vara tom efter exakt 1 timma. Bestäm saltmängden i tanken efter t minuter. Vad är den maximala saltmängden i tanken?

Temavecka 4:

Period: 16/11 – 23/11
Tema: Differentialekvationer, samt system av differentialekvationer.
Avsnitt: Kap 8.7 – 8.9, samt stencil om system av differentialekvationer (SDE)

Rekommenderade övningsuppgifter:

Instuderingsuppgiter: Kap.8: 47,48,50,55,68. SDE: 1
Träningsuppgifter: Kap.8: 49bd,51bd,52,56de,57,62,63abc,65,66,69,70,71b. SDE: 3,4
Extra uppgifter: Kap.8: 73,75

Redovisningsuppgifter (redov. 23/11):

1. Lös följande differentialekvationer.

   (a) $4y''' + y' = 3 + 2e^{x/2}.$

   (b) $y''' + 3y'' + y' - 5y = 0 \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 2, \lim_{t\to\infty} y(t) = 0$

   (c) $y'' + 2y' + 5y = 26\sin(3t), \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 1$

2. Lös följande system av differentialekvationer där $x = x(t)$ och $y = y(t)$.

   (a) $$\begin{cases} 2x' + x + y' + 3y &= (3t + 2) \\ x' - x + y' &= \cos(t) \\ x(0) = y(0) = 0 \end{cases}$$

   (b) $$\begin{cases} y'' - y' + x' - x &= t^2 \\ y' - 2y - x' + 2x &= t \end{cases}$$

3. Vid sönderfall av en atom av ett radioaktivt ämne A bildas en atom av ett annat radioaktivt ämne B. Detta ämne sönderfaller i sin tur till ett stabilt ämne C. Sönderfallshastigheten, dvs antalet sönderfallande atomer per tidsenhet, antages för båda ämnena vid varje tidpunkt vara proportionellt mot antalet just då existerande atomer av respektive ämne. Inför lämpliga beteckningar och gör de antaganden som du anser behövs och härled uttryck för antalet atomer av de radioaktiva ämnena (som funktioner av tiden).

Temavecka 5:

Period: 23/11 – 30/11
Tema: Kurvskaror och differensekvationer.
Avsnitt: Stencil om kurvskaror (KS) och differensekvationer (DE).

Rekommenderade övningsuppgifter:

Instuderingsuppgiter: KS:1a. DE: 1a,2b,3a
Träningsuppgifter: KS: 1cef. DE: 1be,2d,3de,4,7
Extra uppgifter: KS: 1b,2. DE: 8,9,10

Redovisningsuppgifter (redov. 30/11):

1. Bestäm ortogonalkurvorna till kurvskaran $(C - x^2)y = C + x^2$.
2. Bestäm en kurvskara som skär kurvskaran $y = Cx$ under vinkeln $\pi/4$.
3. Lös övningsuppgift 5 i stencilen ”Linjära differensekvationer med konstanta koefficienter”.
4. Lös följande system av differensekvationer.

$$\begin{cases} x_{n+1} &= x_n - y_n + z_n \\ y_{n+1} &= x_n + y_n - z_n \\ z_{n+1} &= 2x_n - y_n \end{cases}$$

Temavecka 6:

Period: 1/12 – 7/12
Tema: Taylorutveckling.
Avsnitt: Kap. 9

Rekommenderade övningsuppgifter:

Instuderingsuppgiter: Kap.9: 1,4,6,8,23,28,37
Träningsuppgifter: Kap.9: 9,13,15,19,24,26,27,29,30,31,32,38abce
Extra uppgifter: 33,34

Redovisningsuppgifter (redov. 7/12):

1. Funktionen $y(x)$ är lösning till differentialekvationen $y' = \sqrt{2x^2 - y^2}$, $y(1) = 1$. Bestäm Taylorpolynomet av grad tre i punkten $x = 1$ till $y(x)$.
2. Funktionen $y(x)$ satisfierar ekvationen $\ln y = xy$ i en omgivning av $x = 0$. Maclaurinutveckla funktionen $y(x)$ med restterm $x^5 B(x)$
3. Bestäm Maclaurinutvecklingen av $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{2}x^3} - 1$ med restterm $x^{10} B(x)$.
4. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \frac{3(3(3((1-x)^{1/3} - 1) + x) + x^2)}{1 - e^{x(1-\cos(2x))}}.$$