Matematiska Institutionen
Chalmers Tekniska Högskola

Tentamen i Matematisk analys i en variabel, del B, för M1 och TD1, 991213, kl 08.45 – 12.45.

Salar: MN **Kurs:** TMA081 del B

Hjälpmedel: Alla hjälpmedel är tillåtna. Valfri räknare, läroböcker, anteckningar mm. Dock ej dator.
Telefon: Patrik Lundström 0740-459022

OBS! Denna tenta skall göras av årets studenter samt av de som är inskrivna 98 eller tidigare och **har** deltagit i årets kontinuerliga examination.

Enbart svar till en uppgift ger inga poäng, fullständig lösning krävs alltid.
För godkänt på tentamen krävs minst 15 poäng.

OBS! Skriv linje, inskrivningsår, namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Skriv personnummer på samtliga inlämnade blad. Sortera uppgifterna i ordning och numrera sedan bladen löpande.

---

1. (a) Lös differentialekvationen $y'' + 6y' + 10y = 39\cos x,\ \ y(0) = 5,\ y'(0) = 0$ (3p)

   (b) Lös differentialekvationen $x(\ln x+1)y' + y\ln x = \frac{1}{x}$ för $x > 0$ med hjälp av substitutionen $x = e^t$. Bestäm den lösning som uppfyller $y(1) = 1$. (3p)

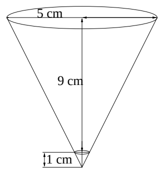
2. (a) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \dfrac{x(\sqrt{1-2x}-1)}{e^{2x}-1-2\sin x}$ (3p)

   (b) Lös differensekvationen $x_{n+2} + 7x_{n+1} + 6x_n = 14n - 5, \quad x_0 = -1, \quad x_1 = 5$ (3p)

3. Kurvan $y(e^x + 1) = 1,\ 0 \le x < \infty$ roterar kring x-axeln. Beräkna rotationskroppens volym genom att ställa upp en (bestämd) integral för beräkning av volymen, i denna integral göra substitutionen $t = e^x$ och i den så erhållna integralen genomföra partialbråksuppdelning och slutligen gränsvärdesberäkning. (6p)

4. Betrakta en vanlig hushållstratt där pipen är borttagen. Vi täpper för hålet i tratten och fyller den sedan med vatten. Hur lång tid tar det för vattnet att rinna ut när vi öppnar hålet igen?

   För att kunna räkna på detta förenklar vi och tänker oss att tratten har uppkommit genom att spetsen av en cirkulär kon sågats av. Vi mäter och finner att konens basradie är 5 cm, den ursprungliga höjden är 10 cm och att spetsen har sågats av så att den återstående höjden blir 9 cm.

   (a) Vid tidpunkten t s är vätskenivån $h(t)$ cm över utloppet. Man kan visa att $h(t)$ är lösning till differentialekvationen $(h+1)^2h' = -\sqrt{2gh}$ där g är gravitationskonstanten. Utnyttja detta för att besvara frågan ovan. (Sätt $g = 980\ cm/s^2$.) (3p)

   (b) Härled differentialekvationen ovan. Du får utnyttja Torricellis lag som säger att utströmningshastigheten $v(t)$ ges av $v = \sqrt{2gh}$.
   Ledning: Beskriv vätskevolymen i tratten som funktion av $h(t)$. Ge två uttryck för volymändringshastigheten. (3p)

   (6p)

5. (a) Antag att $f(x)$ och $g(x)$ är kontinuerliga i intervallet $[a, b]$. Antag också att $g(x) \ge 0$ i intervallet. Visa att det finns $\xi \in (a, b)$ så att $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$. (3p)

   (b) Antag att $f(x) = h(x) + \int_0^x (t-x)^3 g(t)dt$ där h och g är kontinuerliga på intervallet $[0, 2]$. Antag också att $|g(x)| \le 9$ för $0 \le x \le 2$. Visa att $|f(x) - h(x)| \le 36$ för $0 \le x \le 2$. (3p)

Carl-Henrik