Lösning till tentamen i Matematik för M1, Matematisk analys i en variabel, del B, 960115.

1. (a) Bestäm y_{1000} då $4y_{n+2} - y_{n+1} - 3y_n = 14, \quad y_0 = -4$ och $y_1 = -2$.

   (b) Bestäm $y(1)$ då $4y''(x) - y'(x) - 3y(x) = 3x + 4, \quad y(0) = 0$ och $y'(0) = 0$.

   Lösning:

   (a) K.E. $4r^2 - r - 3 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, \quad r_2 = -\dfrac{3}{4} \Rightarrow y_n^{hom} = C_1 + C_2(\dfrac{-3}{4})^n$.
   Ansats $y_n^{part} = An \Rightarrow 4A(n+2) - A(n+1) - 3An = 14 \Rightarrow 7A = 14 \Rightarrow A = 2 \Rightarrow y_n = 2n + C_1 + C_2(\dfrac{-3}{4})^n$.
   $y_0 = C_1 + C_2 = -4, \quad y_1 = 2 + C_1 - \dfrac{3}{4}C_2 = -2 \Rightarrow C_1 = -4, \quad C_2 = 0 \Rightarrow y_n = 2n - 4 \Rightarrow y_{1000} = 1996$.

   (b) K.E. $4r^2 - r - 3 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, \quad r_2 = -\dfrac{-3}{4} \Rightarrow y_{hom}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{3}{4}x}$.
   Ansats $y_p(x) = Ax + B \Rightarrow -A - 3(Ax + B) = 3x + 4 \Rightarrow A = -1, \quad B = -1 \Rightarrow y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{3}{4}x} - x - 1$.
   $y(0) = C_1 + C_2 - 1 = 0, \quad y`(0) = C_1 - \dfrac{3}{4}C_2 - 1 = 0 \Rightarrow C_1 = 1, \quad C_2 = 0 \Rightarrow y(x) = e^x - x - 1 \Rightarrow y(1) = e - 2$.

2. Kurvan $y = f(x)$ är sådan att tangenten i punkten (x, y) går genom punkten $(-x^2, y^2)$.

   (a) Visa att $f(x)$ är lösning till differentialekvationen $(x^2 + x)y' = y - y^2$

   (b) Bestäm $f(x)$ om $f(1) = -1$.

   Lösning:

   (a) Tvåpunktsformeln $\Rightarrow y' = \dfrac{y - y^2}{x - (-x^2)} \Rightarrow y'(x + x^2) = y - y^2$.

   (b) D.E. $\Rightarrow \dfrac{y'}{y - y^2} = \dfrac{1}{x + x^2}$ eftersom $y(1) = -1$ så är $y \neq 0, \quad y \neq 1$.
   $$\int \frac{dy}{y - y^2} = \int \frac{-dy}{y(y-1)} = \int (\frac{1}{y} - \frac{1}{y-1})dy = \ln|\frac{y}{y-1}|.$$
   $$\int \frac{dx}{x^2 + x} = \int \frac{dx}{x(x+1)} \int (\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1})dy = \ln|\frac{x}{x+1}|.$$
   $$\ln|\frac{y}{y-1}| = \ln|\frac{x}{x+1}| + \ln|C| \Rightarrow \frac{y}{y-1} = \frac{Cx}{x+1}.$$
   $y(1) = -1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow y = -x$.

3. Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\sin(x)) - x}{x^3}$.

   Lösning: $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + x^3 o(1)$.

   $\sin(z) = z - \dfrac{z^3}{6} + z^3 o(1)$. $z = \sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + x^3 o(1) \Rightarrow z^3 = (x - \dfrac{x^3}{6} + x^3 o(1))^3 = x^3 + x^3 o(1)$ och $z^3 o(1) = x^3 o(1)$ ty $z \to 0$ då $x \to 0$.

   Alltså är $\sin(\sin(x)) - x = \sin(z) - x = x - \dfrac{x^3}{6} + x^3 o(1) - \dfrac{1}{6}(x^3 + x^3 o(1)) + x^3 o(1) - x = -\dfrac{1}{3}x^3 + x^3 o(1)$ och $\dfrac{\sin(\sin(x)) - x}{x^3} = -\dfrac{1}{3} + o(1) \to -\dfrac{1}{3}$ då $x \to 0$.

4. I följande system av differentialekvationer är $x = x(t)$ och $y = y(t)$,
   $$\begin{cases} x' &= 2x + y \\ y' &= 3x + 4y \end{cases}$$

   (a) Lös ekvationssystemet med eliminationsmetoden.

   (b) Lös ekvationssystemet med matrismetoden (egenvärdesmetoden).

Lösning:

(a) $\begin{cases} x' &= 2x+y \\ y' &= 3x+4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y &= x'-2x \\ x''-2x' &= 3x+4(x'-2x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'-2x &= y \\ x''-6x'+5x &= 0 \end{cases}.$

K.E. $r^2-6r+5=0 \Rightarrow r_1=1, \quad r_2=5 \Rightarrow \begin{cases} x &= C_1e^t+C_2e^{5t} \\ y &= -C_1e^t+3C_2e^{5t} \end{cases}.$

(b) $\begin{cases} x' &= 2x+y \\ y' &= 3x+4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$

Sätt $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Då är $\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda)-3 = \lambda^2-6\lambda+5$ och $\det(A-\lambda E)=0 \Rightarrow \lambda_1=1, \quad \lambda_2=5$.

$A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y &= x \\ 3x+4y &= y \end{cases} \Rightarrow y=-x \Rightarrow \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} C_1 \\ -C_1 \end{bmatrix}.$

$A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y &= 5x \\ 3x+4y &= 5y \end{cases} \Rightarrow y=3x \Rightarrow \boldsymbol{v}21 = \begin{bmatrix} C_2 \\ 3C_2 \end{bmatrix}.$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \boldsymbol{v}_1e^t+\boldsymbol{v}_2e^{5t} = C_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}e^t + C_2\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}e^{5t} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= C_1e^t+C_2e^{5t} \\ y &= -C_1e^t+3C_2e^{5t} \end{cases}.$

5. På en ö finns rävar och kaniner. Kaninerna är byten för rävarna som givetvis äter andra smådjur också. I medeltal tar varje räv 0.3 kaniner per månad. En del kaniner dör av exvis ålder, dessutom föds alltid nya kaniner. Om inga kaniner blev rävföda så skulle antalet kaniner öka med 10% varje månad. Låt antalet rävar månad n vara r_n och antalet kaniner vara k_n. Då är alltså $k_{n+1}=1.1k_n-0.3r_n$.

   Även antalet rävar förändras. Om inga kaniner fanns skulle rävantalet minska med 60% varje månad. Varje kanin gör att i medeltal ytterligare 0.2 rävar överlever.

   Ställ upp ett system av differensekvationer som beskriver situationen ovan och bestäm k_n och r_n om $k_0=100$ och $r_0=10$. Bestäm också $\lim\limits_{n\to\infty} k_n$ och $\lim\limits_{n\to\infty} r_n$.

   Lösning: $\begin{cases} k_{n+1} &= 1.1k_n-0.3r_n \\ r_{n+1} &= 0.2k_n+0.4r_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5r_{n+2}-2r_{n+1} &= 5.5r_{n+1}-2.2r_n-0.3r_n \\ k_n &= 5r_{n+1}-2r_n \end{cases}.$

   Ekvation 1 $\Rightarrow 2r_{n+2}-3r_{n+1}+r_n=0$ som har KE $2s^2-3s+1=0 \Rightarrow s_1=1, \quad s_2=\dfrac{1}{2} \Rightarrow r_n=A+B(\dfrac{1}{2})^n \Rightarrow k_n=3A+\dfrac{1}{2}B(\dfrac{1}{2})^n$.

   $\begin{cases} r_0 &= A+B=10 \\ k_0 &= 3A+\frac{1}{2}B=100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A &= 38 \\ B &= -28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_n &= 114-14(\frac{1}{2})^n \\ r_n &= 38-28(\frac{1}{2})^n \end{cases} \Rightarrow k_n \to 114$ och $r_n \to 38$ då $n\to\infty$.

6. Antag att ett kar har formen av ett rätblock, parallellepiped, med höjd H (m) och basarea A (m^2). Vid tidpunkten $t=0$ innehåller karet V_0 (m^3) vatten. För $t>0$ rinner vatten in i karet med flödet r (m^3/s) samtidigt som vatten strömmar ut genom ett rör i botten. Detta rörs tvärsnittsarea är a (m^2). Då vatten rinner ut ur ett kar via ett kort rör i botten av karet så ges strömningshastigheten v (m/s) enligt en enkel strömningsmodell av $v^2=2gh$, där g är gravitationskonstanten och h är höjden (m) av vätskepelaren ovanför röret. Utnyttja detta för att ge en differentialekvation med vars hjälp man kan bestämma hur mycket vatten det är i karet för $t>0$. Under vilka förutsättningar kommer volymen att öka respektive minska. Töms karet? Svämmar det över?

   Lösning: Vattenvolymen $V(t)$ är $Ah(t)$ m^3. Utflödet är $av(t)=a\sqrt{2gh}=a\sqrt{2gV(t)/A}$ m^3/s. Volymändringen per tidsenhet ges alltså av $V'(t)=r-a\sqrt{2gh}=a\sqrt{2gV(t)/A}$. Sätt $k=a\sqrt{2g/A}$. Då är $V'(t)=r-k\sqrt{V(t)}$ och $V(0)=V_0$. Denna ekvation ger $V(t)$ entydigt. (Den är för övrigt separabel och kan enkelt integreras.)

   Av differentialekvationens riktningsfält följer att om $V(t)>(\dfrac{r}{k})^2$ så är $V'(t)<0$ och $V(t)$ är avtagande. Dessutom närmar sig lösningskurvorna värdet $(\frac{r}{k})^2$ asymptotiskt. Om $V(t)<(\frac{r}{k})^2$ så är $V(t)$ växande. Vi kan alltså dra slutsatsen att om $V_0>(\dfrac{r}{k})^2$ så avtar $V(t)$ asymptotiskt mot $(\frac{r}{k})^2$, det töms alltså aldrig, och om $V_0<(\dfrac{r}{k})^2$ så växer $V(t)$ asymptotiskt mot $(\frac{r}{k})^2$ såvida inte detta värde är större än karets volym då det svämmar över.

7. Betrakta en andra ordningens linjär differentialekvation med konstanta koefficienter $my''(t) + 2d\omega y'(t) + \omega^2 y(t) = f(t), \quad d \neq 0, \quad \omega \neq 0.$

   (a) Vad är den karakteristiska ekvationen till differentialekvationen?

   Lösning: Se boken.

   (b) Antag att $f(t) = 0$. Hur ser den allmänna lösningen till differentialekvationen i så fall ut? Bevisa att det du kallar allmän lösning satisfierar differentialekvationen!

   Lösning: Allmän lösning $y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$. Enklast visa $(D - r)Ce^{rt} = 0$

   (c) Låt $f(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$. Vilken ansats skulle du göra för att hitta en partikulärlösning till differentialekvationen? Bevisa att den ansatsen alltid fungerar.

   Lösning: Ansats av samma typ leder till ekvationssystem vars determinant $\neq 0$ och som därför alltid har unik lösning.

8. Förklara hur du skulle bestämma den ortogonala kurvskaran till kurvskaran $Cx = x^2 + y^2$. Motivera de olika stegen. Förklara också hur du skulle bestämma en kurvskara som skär kurvorna $Cx = x^2 + y^2$ under vinkeln θ där $\tan(\theta) \neq k\pi/2$. Motivera de olika stegen även i detta fall.

   Lösning: Se stencilen om kurvskaror. Utnyttja att nya kurvskarans riktningsfält är det gamla vridet vinkeln θ och att $y' = \tan(v)$ där v är tangentens riktningsvinkel.