Matematiska Institutionen
Chalmers Tekniska Högskola

Lösning till tentamen i Matematisk analys i en variabel, del B, för M1 och TD1, 991213.

---

1. (a) Lös differentialekvationen $y'' + 6y' + 10y = 39\cos x,\ y(0) = 5,\ y'(0) = 0$ (3p)

   Lösning: $y_h(x) = e^{-3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$,
   $y_p(x) = A\cos x + B\sin x \Leftrightarrow (-A+6B+10A)\cos x + (-B-6A+10B)\sin x = 39\cos x \Leftrightarrow$
   $A = 3,\ B = 2 \Rightarrow$
   $y(x) = e^{-3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 3\cos x + 2\sin x$
   $y(0) = 5,\ y'(0) = 0 \Leftrightarrow C_1 = 2,\ C_2 = 4 \Rightarrow$
   $y(x) = e^{-3x}(2\cos x + 4\sin x) + 3\cos x + 2\sin x$

   (b) Lös differentialekvationen $x(\ln x + 1)y' + y\ln x = \frac{1}{x}$ för $x > 0$ med hjälp av substitutionen $x = e^t$. bestäm den lösning som uppfyller $y(1) = 1$. (3p)

   Lösning: $x = e^t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = e^t,\ \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{x} \Rightarrow x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$.
   Insatt i differentialekvationen ger detta: $(t+1)\frac{dy}{dt} + ty = e^{-t}$ som skrivs om till: $\frac{dy}{dt} + \frac{t}{(t+1)}y = \frac{e^{-t}}{(t+1)}$.
   Integrerande faktorn är $\frac{e^t}{(t+1)}$ vilket ger $\frac{e^t}{(t+1)}\frac{dy}{dt} + \frac{te^t}{(t+1)^2}y = \frac{1}{(t+1)^2} \Leftrightarrow \frac{e^t}{(t+1)}y = \int \frac{dt}{(t+1)^2} \Leftrightarrow$
   $y = (t+1)e^{-t}(C - \frac{1}{(t+1)}) = \frac{C(\ln x + 1) - 1}{x}$
   $y(1) = 1 \Rightarrow 1 = C - 1 \Rightarrow y(x) = \frac{2\ln x + 1}{x}$.

2. (a) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{1-2x}-1)}{e^{2x} - 1 - 2\sin x}$ (3p)

   Lösning: Maclaurinutveckling ger
   $$\frac{x(\sqrt{1-2x}-1)}{e^{2x}-1-2\sin x} = \frac{x(1+\frac{1}{2}(-2x) + x^2B_1(x) - 1)}{1 + 2x + \frac{1}{2}(2x)^2 + x^3B_2(x) - 1 - 2(x - x^3B_3(x))} = \frac{-x^2 + x^3B_4(x)}{2x^2 + x^3B_5(x)} \to -\frac{1}{2} \text{ då } x \to 0$$

   (b) Lös differensekvationen $x_{n+2} + 7x_{n+1} + 6x_n = 14n - 5, \quad x_0 = -1, \quad x_1 = 5$ (3p)

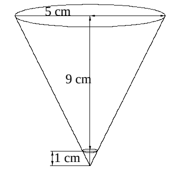
   Lösning: $x_n^{hom} = C_1(-1)^n + C_2(-6)^n$. $x_n^{part} = An + B \Rightarrow A(n+2) + B + 7(A(n+1) + B) + 6(An + B) = 14n - 5 \Rightarrow 14A = 14,\ 9A + 14B = -5 \Rightarrow A = 1,\ B = -1 \Rightarrow x_n = C_1(-1)^n + C_2(-6)^n + n - 1, x_0 = -1, \quad x_1 = 5 \Rightarrow C_1 + C_2 - 1 = -1,\ -C_1 - 6C_2 = 5 \Rightarrow C_1 = 1,\ C_2 = -1 \Rightarrow x_n = (-1)^n - (-6)^n + n - 1$

3. Kurvan $y(e^x + 1) = 1,\ 0 \le x < \infty$ roterar kring x-axeln. Beräkna rotationskroppens volym genom att ställa upp en (bestämd) integral för beräkning av volymen, i denna integral göra substitutionen $t = e^x$ och i den så erhållna integralen genomföra partialbråksuppdelning och slutligen gränsvärdesberäkning. (6p)

   Lösning:
   $$V = \pi \int_0^\infty \frac{1}{(e^x+1)^2}dx = \left\{ \begin{array}{lllr} t & = & e^x & x \to \infty \Rightarrow t \to \infty \\ dt & = & e^x dx & x \to 0 \Rightarrow t \to 1 \\ dx & = & \frac{dt}{t} & \end{array} \right\} = \pi \int_1^\infty \frac{1}{(t+1)^2 t} dt =$$
   $$\pi \int_1^\infty \left(-\frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t}\right)dt = \pi \left[\frac{1}{t+1} + \ln\frac{t}{t+1}\right]_1^\infty = \pi(-\frac{1}{2} + \ln 2)$$

4. Betrakta en vanlig hushållstratt där pipen är borttagen. Vi täpper för hålet i tratten och fyller den sedan med vatten. Hur lång tid tar det för vattnet att rinna ut när vi öppnar hålet igen?

   För att kunna räkna på detta förenklar vi och tänker oss att tratten har uppkommit genom att spetsen av en cirkulär kon sågats av. Vi mäter och finner att konens basradie är 5 cm, den ursprungliga höjden är 10 cm och att spetsen har sågats av så att den återstående höjden blir 9 cm.



   t s är vätskenivån $h(t)$ cm över utloppet. Man kan visa att $h(t)$ är lösning till differentialekvationen $(h+1)^2h' = -\sqrt{2gh}$ där g är gravitationskonstanten. Utnyttja detta för att besvara frågan ovan. (Sätt $g = 980\ cm/s^2$.) (3p)

Lösning: $\int \frac{(h+1)^2}{\sqrt{h}}dh = \int -\sqrt{2g}dt \;\Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\left(\sqrt{h}\right)^5 + \frac{4}{3}\left(\sqrt{h}\right)^3 + 2\sqrt{h}\right) = C - \sqrt{2g}t.$

$h(0) = 9 \Rightarrow C = \frac{696}{5} \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\left(\sqrt{h}\right)^5 + \frac{4}{3}\left(\sqrt{h}\right)^3 + 2\sqrt{h}\right) = \frac{696}{5} - \sqrt{2g}t$

$h(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{696}{5\sqrt{1960}} \approx 3s$

(b) Härled differentialekvationen ovan. Du får utnyttja Torricellis lag som säger att utströmningshastigheten $v(t)$ ges av $v = \sqrt{2gh}$.

Ledning: Beskriv vätskevolymen i tratten som funktion av $h(t)$. Ge två uttryck för volymändringshastigheten. (3p)

Lösning: 1) $V(t) = \pi(r(t))^2(h(t)+1)/3 - \pi r_0^2 h_0/3 = \pi\left(\frac{(h(t)+1)R}{H}\right)^2(h(t)+1)/3 - \pi r_0^2 h_0/3 \Rightarrow V'(t) = \pi\left(\frac{(h(t)+1)R}{H}\right)^2 h'(t)$

2) $V'(t) = -v(t)\pi r_0^2 = -v(t)\pi\left(\frac{R}{H}\right)^2 = \sqrt{2gh(t)}\pi\left(\frac{R}{H}\right)^2.$

1) och 2) $\Longrightarrow \sqrt{2gh(t)}\pi\left(\frac{R}{H}\right)^2 = \pi\left(\frac{(h(t)+1)R}{H}\right)^2 h'(t) \Longleftrightarrow -\sqrt{2gh(t)} = (h(t)+1)^2 h'(t)$
VSV

5. (a) Antag att $f(x)$ och $g(x)$ är kontinuerliga i intervallet $[a,b]$. Antag också att $g(x) \geq 0$ i intervallet. Visa att det finns $\xi \in (a,b)$ så att $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$. (3p)

Lösning: Bevis: Låt m och M vara minsta respektive största värdet för $f(x)$ på intervallet $[a,b]$. Då är $m \leq f(x) \leq M$ på intervallet $[a,b]$. Eftersom $g(x) \geq 0$ i intervallet så kan olikheten multipliceras med $g(x)$. Detta ger $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$. Integration av olikheten ger nu $m\int_a^b g(x)dx < \int_a^b f(x)g(x)dx < M\int_a^b g(x)dx$ (om inte $f(x)$ är konstant och alltså $m = M$ då satsen är självklart sann). Vi kan förutsätta att $\int_a^b g(x)dx > 0$. I annat fall är $g(x) = 0$ för alla x och satsen är självklart sann. Division med ger $m < \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} < M$.

Vi kan dra slutsatsen att $\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = \mu$ för något tal μ så att $m < \mu < M$.

Satsen om mellanliggande värde ger att det finns $\xi \in [a,b]$ så att $f(\xi) = \mu$. Då följer att $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$. VSV

(b) Antag att $f(x) = h(x) + \int_0^x (t-x)^3 g(t)dt$ där h och g är kontinuerliga på intervallet $[0,2]$. Antag också att $|g(x)| \leq 9$ för $0 \leq x \leq 2$. Visa att $|f(x) - P(x)| \leq 36$ för $0 \leq x \leq 2$. (3p)

Lösning: Eftersom $(t-x)^3 \geq 0$ för $0 \leq t \leq x$ så kan satsen ovan tillämpas. Den ger $f(x) - h(x) = \int_0^x (t-x)^3 g(t)dt = g(\xi)\int_0^x (t-x)^3 dt = g(\xi)\left[\frac{1}{4}(t-x)^4\right]_0^x = -g(\xi)\frac{1}{4}x^4$ där $0 < \xi < x$. Förutsättningen $|g(x)| \leq 9$ ger slutligen att $|f(x) - h(x)| = \left|-g(\xi)\frac{1}{4}x^4\right| \leq 9\frac{1}{4}2^4 = 36$ VSV.

Carl-Henrik