CHALMERS | GÖTEBORGS UNIVERSITET

Matematiska Institutionen
Carl-Henrik Fant

25 november 1999

Veckoprogram för Matematisk analys i en variabel, del B, för M1 och TD1, 1999/2000

Temavecka 1: Integraler och användning av integraler. Kap 6, 7.1 – 7.3

Avsnitt	Innehåll	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	Extra
Kap 6	Integraler	1abd,2,3,4,9,11,25,46	6,8,12,13,14,15bc,16bc 17bc,19b,21,27,30ab,40	18c,20b,22,32,34

Redovisningsuppgifter (redovisningsdag: 1 nov)

1. Beräkna följande integraler på två sätt, dels analytiskt och dels genom att tolka integralerna som areor.

   (a) $\int_0^3 |x-1|\,dx$ (b) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

2. Beräkna följande integraler

   (a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x+2e^{-x}+2}dx$ (b) $\int_2^3 (2x-5)\ln(x-2)dx$

3. (a) Bevisa olikheterna $1 \le \int_0^1 3x^2\sqrt{1+x^4}\,dx \le \sqrt{2}$.

   (b) Visa att integralen $\int_0^{\infty} \frac{1+\sqrt{x}}{x^2+\sqrt{|\sin x|}}\,dx$ är konvergent.

Temavecka 2: Användning av integraler. Kap 7.4 – 7.9

Avsnitt	Innehåll	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	Extra
Kap 7	Användning av integraler	1,3,4,9,14,17,24,31,38,47	2,7,11,20,25,28,30 32,40,42,48,49	54,55,66

Redovisningsuppgifter (redovisningsdag: 8 nov)

1. Området som begränsas av y-axeln, linjen $y=8$ och kurvan $y=x^3$ roterar kring x-axeln.

   (a) Beräkna rotationsvolymen.

   (b) Beräkna areorna av de rotationsytor som alstras

2. (Denna uppgift ger 2 poäng.) Betrakta kurvan som går från punkten $(-1,0)$ till punkten $(1,0)$ längs ellipsbågen

   $$x^2+(ay)^2=1\ ,\ y\ge 0, \quad \text{där } a\in\mathbb{R}.$$

   (a) Skissa kurvan för olika värden på a.

   (b) Ange minst två olika parameterframställningar av kurvan.

   (c) Skriv upp en integral som ger längden av kurvan och beräkna längden av kurvan i fallet $a=1$. Använd valfri numerisk metod för att approximativ beräkna längden i fallet $a=4$.

   (d) Beräkna den totala massan längs kurvan om kurvan är belagd med en massa med densiteten $|xy|$.

   (e) Skriv upp de integraler som ger tyngdpunkten för kurvan, om den är belagd med en massa enl. (d), och beräkna tyngdpunkten i fallet $a=1$. Använd valfri numerisk metod för att approximativ beräkna tyngdpunkten i fallet $a=4$.

   (f) Beräkna krökningen av kurvan i punkten $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{a\sqrt{2}})$

3. Låt $f(x)$ vara en funktion som är kontinuerlig och positiv på intervallet $(-\infty, \infty)$. Antag att $f(x)$ är växande på intervallet $(-\infty, 0)$, avtagande på intervallet $(0, \infty)$ och att $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ är konvergent. Visa att
$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx - hf(0) \le h\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nh) \le \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx + hf(0)$
för alla $h > 0$.

Temavecka 3: Differentialekvationer. Kap 8.1 – 8.6

Avsnitt	Innehåll	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	Extra
Kap 8.1 – 8.6	Differentialekvationer.	1,2,3,6bd,8b,23,25,34,38	9,17,18,19,24,26,28 29,32,35,40,41,42,44	33,37,45,74

Redovisningsuppgifter (redovisningsdag: 15 nov)

1. (Denna uppgift ger 2 poäng.) Lös följande differentialekvationer

   (a) $y'(x) = \dfrac{y - y^3}{x^3 + x}$ $y(1) = 3$.

   (b) $3x^2y' = y^2 + 2xy - 2x^2$, $y(2) = -8$. (Tips: $z = \frac{y}{x}$ förenklar.)

   (c) $(x^2 + 3x + 2)y' + y = x^2 - x - 6$, $y(0) = 2$.

   (d) $y''y^3 = 1$, $y(0) = y'(0) = 1$, genom att sätta $y' = p(y)$ och uttrycka y'' med $\frac{dp}{dy}$.

2. Bestäm ekvationen för den kurva som går genom punkten $(1, 1)$ och som är sådan att kurvans normal i punkten (x, y) går genom punkten $(y, 0)$.

3. En tank innehåller 60 liter rent vatten. Genom ett rör tillförs 2 liter saltlösning per minut, denna lösning innehåller 5 gram salt per liter lösning. Genom ett annat rör avtappas tre liter per minut, av den perfekt blandade vätskan i tanken. Tanken kommer alltså att vara tom efter exakt 1 timma. Bestäm saltmängden i tanken efter t minuter. Vad är den maximala saltmängden i tanken?

Temavecka 4: Differentialekvationer, samt system av differentialekvationer. Kap 8.7 – 8.9, samt stencil om system av differentialekvationer (SDE)

Avsnitt	Innehåll	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	Extra
Kap 8	Differentialekvationer	47,48,50,55,68	49bd,51bd,52,56de,57,62 63abc,65,66,69,70,71b	73,75
SDE	System av D.E.	1	3,4	

Redovisningsuppgifter (redovisningsdag: 22 nov)

1. Lös följande differentialekvationer.

   (a) $y''' + 3y'' + y' - 5y = 0$ $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$

   (b) $y'' + 2y' + 5y = 26\sin(3t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

2. Lös följande system av differentialekvationer där $x = x(t)$ och $y = y(t)$.
$$\begin{cases} 5x' + 2x - 6y' + 3y &= 4t + 2\cos(t) + 4\sin(t) \\ 3x' - 2x - 6y' + 9y &= 4t + 6\cos(t) + 4\sin(t) \\ x(0) = y(0) = 0 \end{cases}$$

3. Vid sönderfall av en atom av ett radioaktivt ämne A bildas en atom av ett annat radioaktivt ämne B. Detta ämne sönderfaller i sin tur till ett stabilt ämne C. Sönderfallshastigheten, dvs antalet sönderfallande atomer per tidsenhet, antages för båda ämnena vid varje tidpunkt vara proportionellt mot antalet just då existerande atomer av respektive ämne. Inför lämpliga beteckningar och gör de antaganden som du anser behövs och härled uttryck för antalet atomer av de radioaktiva ämnena (som funktioner av tiden).

Temavecka 5: Kurvskaror och differensekvationer.
Stencil om kurvskaror (KS) och differensekvationer (DE).

Avsnitt	Innehåll	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	Extra
Kap KS	Kurvskaror	1a	1cef	1b,2.
Kap DE	Differensekvationer	1a,2b,3a	1be,2d,3de,4,7	8,9,10

Redovisningsuppgifter (redovisningsdag:29 nov)

1. (a) Bestäm ortogonalkurvorna till kurvskaran $(C - x^2)y = C + x^2$.

   (b) Extrauppgift för överbetyg i matlab, ingår inte i redovisningen:
   Rita riktningsfält till kurvskaran och till den ortogonala skaran i samma figur. Lägg in några kurvor ur resp kurvskara. Ge kommandot `axis 'equal'` för att få ”rätt” vinklar. Redovisa med bilden.

2. Lös övningsuppgift 5 i stencilen ”Linjära differensekvationer med konstanta koefficienter”.

3. (a) En viss skalbaggsart lever i (högst) tre år. Nya ungar föds på våren (baggens första år). De följande två åren fortplantar de sig på hösten. Antalet nya individer bestäms huvudsakligen av antalet honor. För att få en uppfattning hur antalet honor kommer att variera räknar man honorna och åldersbestämmer dem. Man kommer då fram till att en åttondedel av årets nya honor kommer att överleva till nästa år (baggens andra år). Under detta år får de i medeltal 6.5 döttrar. En fjärdedel av de ettåriga kommer att överleva till nästa år (baggens tredje år). De får då i medeltal sex döttrar.

   Kalla antalet årshonor år n för x_n, antalet ettåriga honor y_n och antalet tvååriga honor z_n. Ställ upp ett system av differensekvationer som beskriver ovanstående samband. Lös systemet då $x_0 = y_0 = z_0 = 1000$. Hur ser lösningen ut för stora n?

   (b) Extrauppgift för överbetyg i matlab, ingår inte i redovisningen:
   Skriv en `for`-snurra i Matlab för beräkning av $x_n,\ y_n,\ z_n$ för $n \leq 10$. Jämför med resultatet i a). Redovisa med snurra och beräkningsresultat.