Övningsexempel i Fourieranalys

1. Funktionen $f(x)$ är 2-periodisk, och $f(x) = (x+1)^2$ för $-1 < x < 1$. Utveckla $f(x)$ i komplex trigonometrisk Fourierserie. Sök en 2-periodisk lösning till ekvationen

$$2y'' - y' - y = f(x).$$

2. Funktionen $f(t)$ är 3-periodisk, och

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{för} \quad 0 \le t \le 1, \\ 1 & \text{för} \quad 1 < t < 2, \\ 3-t & \text{för} \quad 2 \le t \le 3. \end{cases}$$

Bestäm, i form av en trigonometrisk Fourierserie, en periodisk lösning till differentialekvationen

$$y'' + 3y = f(t).$$

3. Utveckla funktionen $\cos x$ i sinusserie på intervallet $(0, \frac{\pi}{2})$. Använd resultatet för att beräkna

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(4n^2-1)^2}.$$

4. Låt $f(t) = 1 - t^2$ för $|t| \le 1$ och låt f vara 2-periodisk. Bestäm en begränsad lösning till

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x > 0, -\infty < t < \infty, \\ u(0,t) = f(t), & -\infty < t < \infty. \end{cases}$$

5. Lös Laplaces ekvation $\Delta u = u_{rr} + r^{-1}u_r + r^{-2}u_{\theta\theta} = 0$ i cirkelringen $1 < r < 2$ (polära koordinater) med randvillkoren $u(1,\theta) = 0, u(2,\theta) = f(\theta)$, där $f(\theta)$ är 2π-periodisk, och

$$f(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{\pi^2} \quad \text{för} \quad |\theta| \le \pi.$$

6. Fouriertransformera

a) $\dfrac{t}{(t^2+a^2)^2}$, b) $\dfrac{1}{(t^2+a^2)^2}$, c) $\dfrac{t}{(t^2+1)(t^2+2t+5)}$,
d) $e^{-a|t|}\sin bt \quad (a > 0, b > 0)$.

7. Funktionen $f(t)$ har Fouriertransformen $\hat{f}(\omega) = \frac{\omega}{1+\omega^4}$. Beräkna

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} t f(t) dt$, b) $f'(0)$.

8. Funktionen $f(t)$ har Fouriertransformen $\dfrac{1-i\omega}{1+i\omega}\dfrac{\sin\omega}{\omega}$. Beräkna $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$.

9. Beräkna $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)} dx$ med hjälp av Fouriertransform.

10. Funktionen $f(t)$ har Fouriertransformen $\dfrac{1}{|\omega|^3+1}$. Beräkna $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f * f'|^2 dt$, där $*$ betyder faltning.

11. Ange Fouriertransformen till funktionen
$$f(t) = \int_0^2 \frac{\sqrt{\omega}}{1+\omega} e^{i\omega t} d\omega.$$
Beräkna a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos t dt$, b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$.

12. Låt $f(t) = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{\omega} e^{\omega^2} \cos \omega t d\omega$. Beräkna $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|^2 dt$.

13. Bestäm en lösning till ekvationen
$$u'(t) + 2u(t) + e^{-2t} \int_{-\infty}^{t} e^{2\tau} u(\tau) d\tau = \delta(t).$$

14. Lös integralekvationen
$$\int_0^{\infty} e^{-\tau} u(t-\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{0} e^{\tau} u(t-\tau) d\tau = \sqrt{3} u(t) - e^{-|t|}.$$

15. Bestäm en lösning till ekvationen
$$u(t) + \int_{-\infty}^{t} e^{\tau - t} u(\tau) d\tau = e^{-2|t|}.$$

16. För ett linjärt, tidsinvariant system gäller att insignalen $\dfrac{1}{1+t^2}$ ger upphov till utsignalen $\dfrac{t}{(4+t^2)^2}$. Beräkna impulssvaret, svaret på $\cos \omega t$. Är systemet kausalt, stabilt?

17. Ett linjärt, tidsinvariant system har impulssvaret $h(t) = e^{-4t^2}$. Låt $y(t)$ vara svaret på insignalen e^{-t^2}. Beräkna $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{it} h(t) y(t) dt$.

18. För ett linjärt, tidsinvariant system gäller att insignalen $\dfrac{1}{4+t^2}$ ger upphov till utsignalen e^{-2t^2}. Beräkna utsignalen (i form av en komplex Fourierserie), då insignalen är impulståget
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [2\delta(t-2n) - \delta(t-2n-1)].$$

19. Låt $x(n)$ vara N-periodisk, och
$$x(n) = \begin{cases} 1, & \text{då} \quad 0 \le n \le k-1, \\ 0, & \text{då} \quad k \le n \le N-1. \end{cases}$$
Beräkna den diskreta Fouriertransformen och använd Parsevals formel för att beräkna
$$\sum_{\mu=1}^{N-1} \frac{1-\cos\frac{2\pi\mu k}{N}}{1-\cos\frac{2\pi\mu}{N}}.$$

20. Bestäm den diskreta Fouriertransformen till signalen (sekvensen) $x(n) = \sin \dfrac{n\pi}{N}$, $\quad n = 0, \dots, N-1$, $x(n)$ N-periodisk.

21. Visa att funktionerna $\varphi_n(x) = \dfrac{\sin \frac{x}{2}}{\pi x} e^{inx}$ är parvis ortogonala i $L^2(\mathbf{R})$. Bestäm talen c_n så att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{1+x^2} - \sum_{n=-N}^{N} c_n \varphi_n(x) \right|^2 dx$$

minimeras.

22. Bestäm den lösning $y(x)$ till $y'' - y = 0$ som minimerar $\displaystyle\int_{-1}^{1} [1 + x - y(x)]^2 dx$.

23. Bestäm samtliga egenvärden och egenfunktioner till Sturm-Liouville-problemet

$$\begin{cases} f'' + \lambda f = 0, & 0 < x < a, \\ f(0) - f'(0) = 0, & f(a) + 2f'(a) = 0. \end{cases}$$

24. Bestäm samtliga egenvärden och egenfunktioner till Sturm-Liouville-problemet

$$\begin{cases} -e^{-4x} \dfrac{d}{dx}\left(e^{4x} \dfrac{du}{dx}\right) = \lambda u, \quad 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, \qquad u'(1) = 0. \end{cases}$$

Utveckla funktionen e^{-2x} i Fourierserie m.a.p. egenfunktionerna.

25. Lös problemet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = y, & 0 < x < 2,\ 0 < y < 1, \\ u(x,0) = 0, & u(x,1) = 0, \\ u(0,y) = y - y^3, & u(2,y) = 0. \end{cases}$$

26. Lös problemet

$$\begin{cases} \sqrt{1+t} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0,t) = 1, & u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = 1 - x^2. \end{cases}$$

27. Lös problemet

$$\begin{cases} u''_{xx} + u''_{yy} + 20u = 0, & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \\ u(0,y) = u(1,y) = 0, \\ u(x,0) = 0, & u(x,1) = x^2 - x. \end{cases}$$

28. Lös problemet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = t \sin x, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(2,0) = \sin 2\pi x. \end{cases}$$

29. Lös problemet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0,t) = t + 1, & \\ u(1,t) = 0, & \\ u(x,0) = 1 - x. & \end{cases}$$

30. Lös Laplaces ekvation $\Delta u = 0$ i området $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$, $1 < r < 2$, (polära koordinater i planet) med randvillkoren

$$\begin{cases} u = 0 \text{ för } r = 1, \quad u'_r = 0 \text{ för } r = 2, \\ u = 0 \text{ för } \theta = 0, \quad u = r - 1 \text{ för } \theta\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

31. Utveckla funktionen $\sin(2\sin x)$ i trigonometrisk Fourierserie (reell form).

32. Ett cirkulärt membran med radie a påverkas av en periodisk yttre kraft $q \sin \omega t$ likformigt fördelad över membranet. För de transversella svängningarna har vi alltså ekvationen

$$\Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{q}{S}\sin \omega t, \quad u|_{r=a} = 0.$$

Bestäm den stationära svängningsrörelsen (dvs. en lösning av formen $u(r,t) = v(r)\sin \omega t$). Vilka är resonans(vinkel)frekvenserna?

33. Lös värmeledningsekvationen $u'_t = \Delta u \equiv \nabla^2 u$ i en cylinder med radien b. Ändytorna är isolerade, medan mantelytan $r = b$ (cylinderkoordinater) lyder avsvalningslagen $u + 2u'_r = 0$. Begynnelsetemperaturen är $r^2 = x^2 + y^2$.

34. a) Bestäm en begränsad lösning av formen $u(r,t) = v(r)e^{i\omega t}$ till ekvationen

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\Big(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big) - \dfrac{n^2}{r^2}u, \quad 0 < r < a, \\ u(a,t) = e^{i\omega t}, \end{cases}$$

där $n \geq 0$ är ett heltal. För vilka värden på $\omega > 0$ finns en sådan lösning?

b) Låt ω vara sådant att lösningen i a) existerar. Visa hur den kan användas för att lösa

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\Big(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big) - \dfrac{n^2}{r^2}u, & 0 < r < a,\ t > 0, \\ u(a,t) = \sin \omega t, & u \text{ begränsad}, \\ u(r,0) = 0, & u_t(r,0) = 0. \end{cases}$$

Evenutellt förekommande integraler behöver inte beräknas.

35. Lös Laplaces ekvation $\nabla^2 u = 0$ i cylindern $f = \sqrt{x^2 + y^2} < R$, $0 < z < L$, då $u = 0$ för $z = 0$ och $z = L$, och $u = \sin\frac{\pi z}{L}(1 - \cos\frac{\pi z}{L})$ för $r = R$.

36. Bestäm det polynom $P(x)$ av högst andra graden som gör integralen $\displaystyle\int_0^\infty [\sqrt{x} - P(x)]^2 e^{-x}\,dx$ då liten som möjligt.

37. Bestäm det plynom $P(x)$ av högst andra graden som gör integralen $\int_{-\infty}^{\infty}[x^4 - P(x)]^2 e^{-x^2/2}dx$ så liten som möjligt.

38. Bestäm det plynom $P(x)$ av högst andra graden som gör integralen $\int_0^{\infty}[e^{x/4} - P(x)]^2 xe^{-x}dx$ så liten som möjligt.

39. Bestäm det polynom av formen $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ fö r vilket $\int_0^1 [P(x)]^2 dx$ är så litet som möjligt.

40. Visa att $\int_0^1 xP_{2m}(x)dx = \frac{1}{3}\binom{3/2}{m+1}$.

41. Beräkna, t.ex. med hjälp av genererande funktionen, $H_n'(0)$, där H_n är Hermites polynom.

42. Visa följande formel för (de generaliserade) Laguerrepolynomen $L_n^{\alpha}(x)$:

$$\frac{d}{dx}L_{n+1}^{\alpha}(x) = -L_n^{\alpha+1}(x).$$

(Ledning: Använd genererande funktionen.)

43. Lös Laplaces ekvation $\Delta u = 0$ i området $x^2 + y^2 + z^2 < R^2$ med randvillkoret $u = z(x^2 + y^2)$ då $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

44. Lös Laplaces ekvation $\Delta u = 0$ i området $0 < a < r < b$ (sfäriska koordinater) med randvillkoren

$$\begin{cases} u = 1 + \cos\theta, & \text{då } r = a, \\ u = \cos 2\theta, & \text{då } r = b. \end{cases}$$

45. Sök en begränsad lösning till

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & -\infty < x < \infty,\ t > 0, \\ u(x,0) = (1 - 2x^2)e^{-x^2}, & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

46. Lös problemet

$$\begin{cases} u''_{xx} + u''_{yy} = x, & 0 < x < 1,\ -\infty < y < \infty, \\ u'_x(0,y) = 0, & \\ u(1,y) = ye^{-|y|} & . \end{cases}$$

47. Låt f tillhöra $L^2(\mathbf{R})$ och sök en lösning till

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & -\infty < x < \infty,\ 0 < y < a, \\ u(x,0) = 0, & u(x,a) = f(x). \end{cases}$$

Visa att

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x,y)|^2 dx \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx.$$

48. Bestäm en periodisk lösning till ekvationen $y'' - y' + y = f'(t)$, där

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{för} \quad 0 < t \le 1, \\ t-1 & \text{för} \quad 1 < t < 2, \end{cases}$$

och f är periodisk med period 2. (Med $f'(t)$ avses distributionsderivatan.)

49. Om funktionen f gäller att

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{för} \quad 0 < t < 1, \\ 1 & \text{för} \quad 1 < t < 3, \end{cases}$$

och att $f(t)$ är 3-periodisk. Bestäm $f'(t)$ (distributionsderivatan) och utveckla $f'(t)$ i komplex triogonometrisk Fourierserie. Använd resultatet för att beräkna Fourierserieutvecklingen av $f(t)$.

Svar

1. $f(x) = \dfrac{4}{3} + \dfrac{2}{\pi^2} \displaystyle\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n(1+in\pi)}{n^2} e^{inx}, \quad y = -\dfrac{4}{3} + \dfrac{2}{\pi^2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(1+in\pi)}{n^2(2n^2\pi^2 + in\pi + 1)} e^{inx}$

2. $y(t) = \dfrac{2}{9} - \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(1-\cos\frac{2n\pi}{3})}{\pi^2 n^2 (3 - \frac{4}{9} n^2 \pi^2)} \cos\frac{2n\pi t}{3}$

3. $\cos x = \dfrac{8}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2-1} \sin 2nx \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$. Summan blir $\dfrac{\pi^2}{64}$.

4. $u(x,t) = \dfrac{2}{3} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n-1}}{n^2\pi^2} e^{-\sqrt{\frac{n\pi}{2}}x} \cos(n\pi t - \sqrt{\frac{n\pi}{2}} x x)$

5. $\dfrac{2}{2\ln 2} \ln r + \dfrac{2}{\pi^2} \displaystyle\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^{n_1}}{n^2(2^n - 2^{-n})} (r^n - r^{-n}) e^{in\theta}$

6. a) $-\dfrac{i\pi}{2a}\omega e^{-a|\omega|}$ b) $\dfrac{\pi}{2a^3}(1 + a|\omega|)e^{-a|\omega|}$
   c) $\dfrac{\pi}{10} e^{-|\omega|}(1 - 2isgn\omega) - \dfrac{\pi}{10} e^{-2|\omega|} e^{i\omega} \left(\dfrac{3}{2} - 2isgn\omega \right)$
   d) $-\dfrac{4iab\omega}{(\omega^2 + 2b\omega + a^2 + b^2)(\omega^2 - 2b\omega + a^2 + b^2)}$

7. a) i b) $\dfrac{i}{2\sqrt{2}}$

8. $\dfrac{1}{2}$

9. $\pi(1-e^{-1})$

10. $\dfrac{1}{9\pi}$

11. $\hat{f}(\omega)=\dfrac{2\pi\sqrt{\omega}}{1+\omega}$ för $0<\omega<2$, 0 för övrigt. a) $\dfrac{\pi}{2}$, b) $2\pi\left(\ln 3-\dfrac{2}{3}\right)$

12. $\dfrac{\pi}{8}(e^2+1)$

13. $\theta(t)e^{-2t}\cos t$

14. $u(t)=\dfrac{1}{2}e^{-t/\sqrt{3}}\theta(t)+\dfrac{1}{2}e^{\sqrt{3}t}(1-\theta(t))$

15. $\dfrac{3}{4}e^{-2|t|}-te^{-2t}\theta(t)$

16. $h(t)=\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{t}{(1+t^2)^2}$; $\quad x(t)=\cos\omega t$ ger $y(t)=\dfrac{\omega}{4}e^{-|\omega|}\sin\omega t$; ej kausalt, stabilt.

17. $\dfrac{\pi}{2\sqrt{6}}e^{-5/96}$

18. $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[1-\frac{1}{2}(-1)^n\right]e^{-n^2\pi^2/8+2|n|\pi}e^{in\pi t}$

19. summan blir $k(N-k)$.

20. $X(\mu)=\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-2\pi i\mu n/N}=\frac{\sin\frac{\pi}{N}}{\cos\frac{2\mu\pi}{N}-\cos\frac{\pi}{N}}$

21. $c_n=\begin{cases}\pi(e^{\frac{1}{2}}-e^{-\frac{1}{2}})^{-|n|} & \text{för } n\neq 0\\ 2\pi(1-e^{-\frac{1}{2}}) & \text{för } n=0\end{cases}$

22. $\dfrac{2\sinh 1}{\frac{1}{2}\sinh 2+1}\cosh x+\dfrac{2e^{-1}}{\frac{1}{2}\sinh 2-1}\sinh x$

23. Egenvärden: $\lambda_k=\nu_k^2$, där ν_k är de positiva rötterna till ekvationen $\tan\nu a=\frac{3\nu}{2\nu^2-1}$

24. $\lambda_1=r-\beta_1^2$, där β_1 är den positiva roten till ekv. $\tanh\beta=\dfrac{\beta}{2}$; $u_1(x)=e^{-2x}\sinh\beta_1 x$
$\lambda_n=4+\beta_n^2$, där β_n, $n=2,3,\ldots$, är de positiva rötterna till ekv. $\tan\beta=\dfrac{\beta}{2}$; $u_n(x)=e^{-2x}\sin\beta_n x$
$$e^{-2x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sqrt{\lambda_N}[\sqrt{\lambda_n}+2(-1)^n]}{\beta_n(\lambda_n-2)}u_n(x)$$

25. $u(x,y)=\dfrac{1}{6}(y^3-y)+\dfrac{2}{\pi^3}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3\sinh 2n\pi}(\sinh n\pi x+7\sinh n\pi(2-x))\sin n\pi y$

26. $u(x,t)=1-x+\dfrac{8}{\pi^3}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}e^{-\frac{2}{3}(2k+1)^2\pi^2[(1+t)^{3/2}-1]}\sin(2k+1)\pi x$

27. $u(x,y) = -\frac{8}{\pi^3}\sin \pi x \frac{\sin(\sqrt{20-\pi^2}y)}{\sin\sqrt{20-\pi^2}} -$
$- \frac{8}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\sin(2k+1)\pi x \frac{\sinh(\sqrt{(2k+1)^2\pi^2-20}y)}{\sinh\sqrt{(2k+1)^2\pi^2-20}}$

28. $u(x,t) = e^{-4\pi^2 t}\sin 2\pi x + 2\pi \sin 1 \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2\pi^2-1}\Big[\frac{t}{n^2\pi^2} - \frac{1}{n^4\pi^4}(1-e^{-n^2\pi^2 t})\Big]\sin n\pi x$

29.

$$\begin{aligned} u(x,t) &= (t+1)(1-x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3\pi^3}(e^{-2n^2\pi^2 t}-1)\sin n\pi x = \\ &= (t+1)(1-x) + \frac{x^2}{4} - \frac{x}{6} - \frac{x^3}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3\pi^3}e^{-2n^2\pi^2 t}\sin n\pi x \end{aligned}$$

30. $u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2[(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{\ln 2}(-1)^n - 1]}{(n+\frac{1}{2})\pi[(n+\frac{1}{2})^2(\frac{\pi}{\ln 2})^2+1]}\frac{\sinh(n+\frac{1}{2})\frac{\pi\theta}{\ln 2}}{\sinh(n+\frac{1}{2})\frac{\pi^2}{4\ln 2}}\sin(n+\frac{1}{2})\frac{\pi \ln r}{\ln 2}$

31. $\sin(2\sin x) = 2\sum_{k=0}^{\infty}J_{2k+1}(2)\sin(2k+1)x$

32. $\frac{qc^2}{S\omega^2}\left(\frac{J_0\left(\frac{\omega r}{c}\right)}{J_0\left(\frac{\omega a}{c}\right)} - 1\right)\sin \omega t$

res.frekv. är $\frac{c}{a}\alpha_{0,n}$, där $\alpha_{0,n},\ n = 1, 2, \ldots$, är J_0:s positiva nollställen.

33. $u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{8b^2[(2+\frac{b}{2})\alpha_k^2 - 2b]}{\alpha_k^2(4\alpha_k^2+b^2)J_0(\alpha_k)}e^{-(\frac{\alpha_k}{b})^2 t}J_0\left(\frac{\alpha_k r}{b}\right)$, där α_k är de pos.rötterna till
$J_0(\alpha) + \frac{2}{b}\alpha J_0'(\alpha) = 0$.

34. a. $v(r) = \frac{J_n(\omega r)}{J_n(\omega a)}$ om $J_n(\omega a) \neq 0$.

b. $u(r,t) = \frac{J_n(\omega r)}{J_n(\omega a)}\sin \omega t + \sum_{k=1}^{\infty}a_k \sin\frac{\alpha_k t}{a}J_N\left(\frac{\alpha_k r}{a}\right)$, där α_k är de positiva nollställena till $J_n(x)$, och

$$a_k = -\frac{2\omega}{a\alpha_k[J_{n+1}(\alpha_k)]^2 J_n(\omega a)}\int_0^a J_n(\omega r)J_n\left(\frac{\alpha_k r}{a}\right)r\,dr\left(= \frac{2\omega a}{(\omega^2 a^2-\alpha_k^2)J_{n+1}(\alpha_k)}\right)$$

35. $u(r,z) = \frac{I_0(\frac{\pi r}{L})}{I_0(\frac{\pi R}{L})}\sin\frac{\pi z}{L} - \frac{1}{2}\frac{I_0(\frac{2\pi r}{L})}{I_0(\frac{2\pi R}{L})}\sin\frac{2\pi z}{L}$

36. $\frac{\sqrt{\pi}}{16}(3+6x-\frac{1}{2}x^2)$

37. $3(2x^2+12)$

38. $\frac{8}{81}(x^2+12)$

39. $x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{1}{20}$

41. $H'_{2k}(0) = 0, \quad H'_{2k+1}(0) = 2(-1)^k \frac{2k+1)!}{k!}, \; k = 0, 1, \ldots$

43. $u = \dfrac{2}{5}R^2 z + \dfrac{3}{5}(x^2 + y^2 + z^2)z - z^3$

44. $$u(r,\theta) = \frac{1}{3(b-a)}\left(\frac{4ab}{r} - 3a - b\right) + \frac{a^2}{b^3 - a^3}\left(\frac{b^3}{r^2} - r\right)\cos\theta + $$
$$+ \frac{2b^3}{3(b^5 - a^5)}\left(r^2 - \frac{a^5}{r^3}\right)(3\cos^2\theta - 1)$$

45. $$u(x,t) = \frac{4kt + 1 - 2x^2}{(4kt+1)^{5/2}} e^{-\frac{x^2}{4kt+1}}$$

46. $$u(x,y) = \frac{1}{6}(x^3 - 1) + \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\eta}{(1+\eta^2)^2}\frac{\cosh \eta x}{\cosh \eta}\sin \eta y \, d\eta$$

47. $$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh \xi y}{\sinh \xi a}\hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \left(= \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi y}{a}}{\cosh \frac{\pi(x-t)}{a} + \cos \frac{\pi y}{a}} f(t) dt \right)$$

48. $$y(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{n\pi - i(1 - (-1)^n)}{2n\pi(n^2\pi^2 - 1 + in\pi)} e^{in\pi t}$$

49. $$f'(t) = 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} [\delta(t - 3n - 1) - \delta(t - 3n)] = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{2}{3}(e^{-in\frac{2\pi}{3}} - 1)e^{in\frac{2\pi}{3}t}$$

$$f(t) = \frac{1}{3} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{-in\frac{2\pi}{3}} - 1}{in\pi} e^{in\frac{2\pi}{3}t}$$