TMA132 FOURIERANALYS F2/Kf2, 5p

2005-01-15 Lösningar.

---

1. Enligt satsen 5.3 b för $c=0$, $b=2$, $\nu=3$, är Besselfunktioner $J_3(\mu_k \frac{x}{2}) = \varphi_k(x)$, $k=1,2,\ldots$ ett fullständigt ortogonalt system på intervallet $(0,2)$ med vikten $w(x)=x$. Man har också

$$\|\varphi_k\|_w^2 = \frac{2^2(\mu_k^2-9)}{3\mu_k^2} J_3^2(\mu_k).$$

Fourier-Bessel koefficienter av funktionen $f(x)$ m.a.p. $\{\varphi_k(x)\}$ är lika med

$$c_k = \int_0^2 \varphi_k(x) f(x)\, x\, dx \, \|\varphi_k\|_w^{-2}.$$

Vi beräknar integralen

$$\int_1^2 x^4 J_3\left(\mu_k \frac{x}{2}\right) dx = \left(\begin{array}{l} y = \mu_k \frac{x}{2} \\ dx = \frac{2}{\mu_k} dy \end{array}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{\mu_k}\right)^5 \int_{\mu_k/2}^{\mu_k} y^4 J_3(y)\, dy \overset{(5.14,\ \nu=4)}{=} \left(\frac{2}{\mu_k}\right)^5 \int_{\mu_k/2}^{\mu_k} \left(y^4 J_4(y)\right)' dy$$

$$= \left(\frac{2}{\mu_k}\right)^5 \left(\mu_k^4 J_4(\mu_k) - \left(\frac{\mu_k}{2}\right)^4 J_4(\mu_k/2)\right).$$

svar $$c_k = \frac{3\mu_k^2}{2^3(\mu_k^2-9)} \left(\frac{2^5}{\mu_k}\left(J_4(\mu_k) - \frac{1}{2^4} J_4(\mu_k/2)\right)\right).$$

2. Sätt in
$u(r,t) = v(r)\sin\omega t$ i differentialekvationen,

$$-\omega^2 v(r)\sin\omega t = c^2\frac{1}{r}(rv'(r))'\sin\omega t,$$

$$r^2v'' + rv' + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 r^2 v = 0.$$

Det är Besselekvationen av ordning 0
med lösning

$$v(r) = C_1 J_0\left(\frac{\omega r}{c}\right) + C_2 Y_0\left(\frac{\omega r}{c}\right)$$

där J_0 är Besselfunktionen, Y_0 är Weber-funktionen.
Randvillkoren är $v(1) = 0$, $v(3) = 2$
Söker C_1 och C_2 från randvillkoren:

$$C_1 J_0\left(\frac{\omega}{c}\right) + C_2 Y_0\left(\frac{\omega}{c}\right) = 0$$

$$C_1 J_0\left(\frac{3\omega}{c}\right) + C_2 Y_0\left(\frac{3\omega}{c}\right) = 2$$

För lösbarhet krävs att determinant
av systemet inte är 0
Lösningen finns för $J_0\left(\frac{\omega}{c}\right)Y_0\left(\frac{3\omega}{c}\right) - Y_0\left(\frac{\omega}{c}\right)J_0\left(\frac{3\omega}{c}\right)$

$$\neq 0,$$

3. Avbildningen

$w = F(z) = i\,\frac{1+z}{1-z}$ till övre halvplanet,

avbildar enhetscirkel

den inversa avbildningen är

$z = G(w) = \frac{w-i}{w+i}$

om $f(z)$ är en harmonisk funktion i enhetscirkeln, så blir

$g(w) = f(G(w))$ en harmonisk begränsad funktion i övre halvplanet.

Vid den transformationen $F(z)$ avbildas gränspunkten $z = (r, \theta) = (1, 0) = 1$

till $w = F(1) = \infty$; punkten $z = (r, \theta)$

$= (1, \pi/4) = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

avbildas till $w = i\,\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)} = 1$

Cyrkelbågen mellan $z = 1$ och $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

går över till halv-linje $w = (\xi, 0)$, $\xi > 1$.

Så måste den harmoniska funktionen $g(w)$ satisfiera på reella axeln randvillkoren: $g(\xi, 0) = 0$, $\xi < 1$, $g(\xi, 0) = 1$, $\xi > 1$.

Lösningen ges av formeln

$g(w) = 1 - \frac{1}{\pi}\,\mathrm{arccot}\left(\frac{\xi-1}{2}\right)$

$= 1 - \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\,\mathrm{Log}(w-1)$

Slutligen använder inversa avbildningen

$f(z) = g(F(z)) = 1 - \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\,\log\left(i\,\frac{1+z}{1-z} - 1\right)$

sätter $z = x+iy$ — får uttrycket genom x, y.

4. Eftersom $\mathcal{F}[e^{-|t|}\operatorname{sgn} t] = -\frac{2i\omega}{1+\omega^2}$,

ger Planchetel's formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-|t|} \operatorname{sgn} t \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 \theta(\omega)}{(1+\omega^2)^2} \cdot \overline{\frac{-2i\omega}{1+\omega^2}} \, d\omega$$

$$= \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega^3}{(1+\omega^2)^3} \, d\omega .$$

Den sista integralen beräknas med substitution $\omega^2 = s$:

$$= \frac{i}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{s}{(1+s)^3} \, ds = \frac{i}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{s+1-1}{(1+s)^3} \, ds$$

$$= \frac{i}{2\pi} \left(\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{(1+s)^2} - \frac{1}{(1+s)^3} \right) ds \right) = \frac{i}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{i}{4\pi} .$$

5. Vi separerar variabler. $u = X(x) Y(y)$; Vi får

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X'(\pi) = 0 \; ; \quad Y'' - \lambda Y = 0 .$$

Egenvärdeproblem för X ger $X_n(x) = \sin \frac{nx}{2}$,

$\lambda_n = \frac{n^2}{4}$. Då blir lösningen för Y_n:

$$Y_n = a_n \cosh \frac{ny}{2} + b_n \sinh \frac{ny}{2}$$

$u(x,y)$ har formen av en serie

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{nx}{2} \left(a_n \cosh \frac{ny}{2} + b_n \sinh \frac{ny}{2} \right).$$

För att hitta a_n, b_n sätter in i gransvillkoren ~~x~~ $y = 0$ och $y = 1$.

För $y=0$: $u(x,0) = \sin \frac{x}{2} = \sum \sin \frac{nx}{2} a_n$

$y=1$: $u(x,1) = \sin \frac{x}{2} = \sum \sin \frac{nx}{2} \left(a_n \cosh \frac{n}{2} + b_n \sinh \frac{n}{2} \right)$

~~För alla n utom~~

Vi jämför koeff. vid $\sin\frac{n}{2}x$ och ser att för alla n utom $n=1$, $a_n = b_n = 0$. För $n=1$ har vi

$$a_1 = 1 \;; \quad a_1 \cosh\tfrac{1}{2} + b_1 \sinh\tfrac{1}{2} = 1$$

$$b_1 = \frac{1-\cosh\frac{1}{2}}{\sinh\frac{1}{2}}$$

$$u(x,y) = \sin\frac{x}{2}\left(\cosh\frac{y}{2} + \frac{1-\cosh\frac{1}{2}}{\sinh\frac{1}{2}}\sinh\frac{y}{2}\right).$$

6. Gränsvillkoren är ohomogena, därför krävs ett förberedelsesteg: vi söker en funktion $w(x,t)$ som satisfierar gränsvillkoren $w(0,t)=1$, $w(\pi/2,t)=0$. Vi väljer $w(x,t) = \cos x$. Nu söker vi $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$. Sätter in i ekvationen och får

$$v_{xx} = v_t + v + \cos x \;; \quad v(x,0) = 0$$
$$v(0,t)=0,\; v(\tfrac{\pi}{2},t)=0.$$

~~Vi för~~

Vi söker lösningar till homogena ekvationen $v_{xx} = v_t + v$ i formen $v(x,t) = X(x)T(t)$

För $X(x)$ får vi Sturm-Liouville problem

$$X''_{xx} - X = \lambda X, \quad X(0) = X(\tfrac{\pi}{2}) = 0$$

Egenfunktioner är

$$X_n(x) = \sin 2nx,$$

Egenvärdena är $\lambda_n = (2n)^2 - 1$

Lösningen $v(x,t)$ söks i formen

$$v(x,t) = \sum c_n(t) X_n(x),$$

Vi sätter den formen in i ekvationen

$$\sum c_n(t) X_n'' = \sum c_n' X_n + \sum c_n X_n + \cos x;$$

$$-\sum (2n)^2 c_n(t) \sin 2nx$$

$$= \sum c_n' \sin 2nx + \sum c_n \sin 2nx + \cos x;$$

multiplicerar med $\sin 2kx$ och integrerar; I summen alla termer utom $n=k$ försvinner. För $n=k$ har vi:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(2nx)\,dx = \frac{\pi}{4};$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin(2nx)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin(1+2n)x - \sin(1-2n)x\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{1+2n}\cos(1+2n)x\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{1-2n}\cos(1-2n)x\Big|_0^{\pi/2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{1+2n} + \frac{1}{1-2n}\right) = -\frac{1}{2}\,\frac{4n}{4n^2-1}$$

Så kommer vi till ekvationen för c_n:

$$\frac{\pi}{4} c_n' + (2n)^2 \frac{\pi}{4} c_n + \frac{\pi}{4} c_n = \frac{-1}{2}\,\frac{4n}{4n^2-1},$$

$$c_n(0) = 0.$$

$$c_n' + \left((2n)^2+1\right) c_n = -\frac{8n}{4n^2-1}, \quad c_n(0) = 0$$

Vi löser ekvationen:

$$c_n(t) = -\frac{8n}{4n^2-1}\left(e^{-((2n)^2+1)t} - 1\right)$$

Lösningen

$$u(x,t) = \cos x + \sum -\frac{8n}{4n^2-1}\left(e^{-((2n)^2+1)t} - 1\right)\sin 2nx.$$