Lösning till tentamen i Fourieranalys för F2/Kf2 den 17/1 1998

1. Fouriertransformering av ekvationen ger

$$-\omega^2\hat{u}-\hat{u}=-\frac{8i\omega}{(\omega^2+4)^2},\qquad \hat{u}=\frac{8i\omega}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)^2}=\frac{8}{9}\frac{i\omega}{\omega^2+1}-\frac{8}{9}\frac{i\omega}{\omega^2+4}-\frac{8}{3}\frac{i\omega}{(\omega^2+4)^2},$$

$$u(t)=-\frac{4}{9}e^{-|t|}\operatorname{sgn}t+\frac{4}{9}e^{-2|t|}\operatorname{sgn}t+\frac{1}{3}te^{-2|t|}=\boxed{\frac{4}{9}(e^{-2|t|}-e^{-|t|})\operatorname{sgn}t+\frac{1}{3}te^{-2|t|}}.$$

---

2. Låt $\tilde{u}(x)$ satisfiera $-\tilde{u}''=1$, $\tilde{u}(0)=\tilde{u}(1)=0$. Man får $\tilde{u}(x)=\frac{1}{2}(x-x^2)$. Sätt $v(x,t)=u(x,t)-\tilde{u}(x)$. För v fås då

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$
$$v(0,t)=0,\quad v(1,t)=0,$$
$$v(x,0)=\frac{1}{2}(x^2-x),\quad v_t(x,0)=0.$$

Variabelseparation: $v(x,t)=X(x)T(t)$ i de homogena ekvationerna ger

$$X''+\lambda X=0,\qquad T''+\lambda T=0,$$
$$X(0)=0,\quad X(1)=0,\qquad T'(0)=0.$$

Egenvärdesproblemet för X ger $\lambda_n=(n\pi)^2$, $X_n(x)=\sin n\pi x$. För T fås sedan $T_n(t)=a_n\cos n\pi t$. Ansätt

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)T_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin n\pi x\ \cos n\pi t,$$

och bestäm a_n så att

$$v(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin n\pi x=\frac{1}{2}(x^2-x).$$

Eftersom $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ är en ortogonalbas för $L^2(0,1)$ fås

$$a_n=2\int_0^1\frac{1}{2}(x^2-x)\sin n\pi x\,dx=\ldots=2\frac{(-1)^n-1}{n^3\pi^3}.$$

Resultatet blir

$$\boxed{u(x,t)=\frac{1}{2}(x-x^2)-\frac{4}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\sin(2k+1)\pi x\ \cos(2k+1)\pi t}.$$

---

3. $x_n=c^n$ har den diskreta Fouriertransformen

$$X(m)=\sum_{n=0}^{N-1}c^nW^{-mn}=\sum_{n=0}^{N-1}(cW^{-m})^n=\frac{1-(cW^{-m})^N}{1-cW^{-m}}=\frac{1-c^NW^{-mN}}{1-cW^{-m}}=\left[W=e^{2\pi i/N}\right]$$
$$=\frac{1-c^N}{1-ce^{-2m\pi i/N}},\quad m=0,1,\ldots,N-1.$$

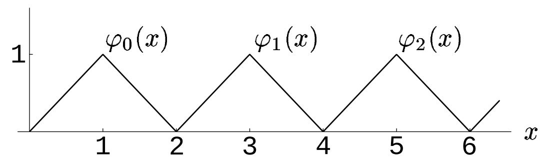
Parsevals formel $\sum_{n=0}^{N-1}|x_n|^2=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}|X(m)|^2$ ger

$$\sum_{n=0}^{N-1}c^{2n}=\frac{1-c^{2N}}{1-c^2}=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\frac{(1-c^N)^2}{|1-c\cos\frac{2m\pi}{N}+ic\sin\frac{2m\pi}{N}|^2}=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\frac{(1-c^N)^2}{(1-c\cos\frac{2m\pi}{N})^2+c^2\sin^2\frac{2m\pi}{N}},$$

$$\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\frac{1-c^2}{1+c^2-2c\cos\frac{2m\pi}{N}}=\frac{1-c^{2N}}{(1-c^N)^2}=\boxed{\frac{1+c^N}{1-c^N}}.$$

---

4. Sätt $\varphi_k(x) = \varphi(x-2k-1)$. Funktionerna φ_k är ortogonala på $(0,\infty)$ (se fig.), ty $\varphi_k(x) \neq 0$ endast för $-1 < x-2k-1 < 1$, dvs. $2k < x < 2k+2$, och intervallen $(2k, 2k+2)$, $k \geq 0$, är disjunkta.



$$\begin{aligned}\|\varphi_k\|^2 &= \int_0^\infty \varphi_k^2(x)\,dx = \int_{2k}^{2k+2} [\varphi(x-2k-1)]^2\,dx = \left[x-2k-1=t\right] \\ &= \int_{-1}^{1} [\varphi(t)]^2\,dt = 2\int_0^1 (1-t)^2\,dt = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Minimum av $\int_0^\infty [e^{-x} - \sum_{k=0}^N c_k\varphi(x-2k-1)]^2\,dx = \|e^{-x} - \sum_{k=0}^N c_k\varphi_k\|^2$ fås för

$$\begin{aligned}c_k &= \frac{1}{\|\varphi_k\|^2}\int_0^\infty e^{-x}\varphi_k(x)\,dx = \frac{3}{2}\int_{2k}^{2k+2} e^{-x}\varphi(x-2k-1)\,dx \\ &= \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} e^{-t-2k-1}\varphi(t)\,dt = \frac{3}{2}e^{-2k-1}\left[\int_{-1}^{0} e^{-t}(1+t)\,dt + \int_0^1 e^{-t}(1-t)\,dt\right] \\ &= \frac{3}{2}e^{-2k-1}(-2+e+e^{-1}) = \frac{3}{2}e^{-2k}(1+e^{-2}-2e^{-1}) = \boxed{\frac{3}{2}e^{-2k}(1-e^{-1})^2}.\end{aligned}$$

---

5. Då $u(r,\theta)$ måste vara 2π-periodisk i θ, kan man ansätta $u(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(r)e^{in\theta}$. Insättning i $\nabla^2 u + u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + u = 0$ ger

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ru_n')e^{in\theta} - \frac{n^2}{r^2}u_n e^{in\theta} + u_n e^{in\theta}\right) = 0.$$

Koefficienten framför $e^{in\theta}$ (Fourierkoefficienten) måste vara 0:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ru_n') - \frac{n^2}{r^2}u_n + u_n = 0, \qquad r^2u_n'' + ru_n' + (r^2-n^2)u_n = 0.$$

Detta är Bessels differentialekvation av ordning n med den allmänna lösningen

$$u_n(r) = A_nJ_n(r) + B_nY_n(r).$$

Då $u_n(r)$ måste vara begränsad då $r \to 0$, är $B_n = 0$. Vidare skall vi ha

$$u(1,\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_nJ_n(1)e^{in\theta} = \theta(\pi - |\theta|), \quad -\pi < \theta \leq \pi.$$

Utveckla $\theta(\pi-|\theta|)$ i komplex trigonometrisk Fourierserie: $\theta(\pi-|\theta|) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_ne^{in\theta}$, där

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\theta(\pi-|\theta|)e^{-in\theta}\,d\theta = -\frac{i}{\pi}\int_0^\pi \theta(\pi-\theta)\sin n\theta\,d\theta = \frac{2i}{\pi}\frac{(-1)^n-1}{n^3}, \quad \text{om } n \neq 0, \quad c_0 = 0.$$

Alltså är $A_nJ_n(1) = c_n$, och då första positiva nollstället till $J_n(r)$ är större än 1, så är $J_n(1) \neq 0$, och

$$u(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\frac{J_n(r)}{J_n(1)}e^{in\theta}.$$

Eftersom c_n är udda och $\frac{J_n(r)}{J_n(1)}$ jämn i n, blir

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n^3}\frac{J_n(r)}{J_n(1)}\sin n\theta = \boxed{\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\frac{J_{2k+1}(r)}{J_{2k+1}(1)}\sin(2k+1)\theta}.$$
