Några teorifrågor i Fourieranalys för F2/Kf2.

På tentan ges en fråga från följande lista på några centrala moment. Därutöver ges en annan teorifråga som inte behöver hämtas från denna lista.

1. Antag att f är 2π-periodisk och styckvis glatt. Visa att Fourierseriens partialsummor konvergerar mot $f(\theta)$ i varje punkt θ där f är kontinuerlig (se Läsanvisningar).
2. Visa Fouriers inversionssats under förutsättning att f och $\hat{f}$ tillhör L^1 (sid. 218).
3. Visa Plancherels formel om f, g, $\hat{f}$, $\hat{g}$ tillhör L^1 (sid. 221).
4. Samplingsteoremet (Holmåker, avsnitt 5).
5. Låt $\{\varphi_n\}_1^N$ vara en ortonormalmängd i $PC(a,b)$ (eller $L^2(a,b)$). Låt U vara underrummet genererat av $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ och låt f vara godtyckligt. Visa att funktionen $\tilde{f} = \sum_{n=1}^N \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n$ är den funktion i U som ligger närmast f. Visa också att $\|f - \tilde{f}\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^N |\langle f, \varphi_n \rangle|^2$.
6. Låt $\{\varphi_n\}_1^\infty$ vara en ortonormalmängd i $L^2(a,b)$. Visa att följande villkor är ekvivalenta:

   a) Om $\langle f, \varphi_n \rangle = 0$ för alla n, så är $f = 0$.

   b) För varje $f \in L^2(a,b)$ är $f = \sum_{n=1}^\infty \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n$ med konvergens i norm.

   c) För varje $f \in L^2(a,b)$ gäller $\|f\|^2 = \sum_{n=1}^\infty |\langle f, \varphi_n \rangle|^2$ (Parsevals formel).
7. Låt ett regulärt Sturm-Liouville-problem vara givet.

   a) Visa att alla egenvärden är reella.

   b) Visa att egenfunktioner svarande mot olika egenvärden är ortogonala m.a.p. viktfunktionen.
8. Visa att $\sum_{n=-\infty}^\infty J_n(x) z^n = e^{\frac{x}{2}(z - \frac{1}{z})}$ (sid. 134–135).
9. Visa att Legendrepolynomen är ortogonala i $L^2(-1,1)$ (sid. 167).
10. Härled differentialekvationen för Legendrepolynomen (Theorem 6.2, sid. 168).
11. Hermitepolynomens ortogonalitet (Theorem 6.11, sid. 184).
12. Definiera vad som menas med derivatan av en distribution. Motivera definitionen. Visa att $\theta' = \delta$ där θ är Heavisides stegfunktion (sid. 308–309).