Fourierserier

Fourierserier för 2π-periodiska funktioner:

Antag att f är Riemann integrerbar (styckvis kontinuerlig), och 2π-periodisk. Vi utvecklar f i Fourierserier enligt:

$$\begin{cases} f(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos n\theta + b_n \sin n\theta\Big), & \boxed{R} \quad \text{eller} \\ f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big(C_n\cos n\theta + i\,C_n\sin n\theta\Big), & \boxed{K} \end{cases}$$

Vi använder oss av formlen $\cos(n\theta) = \frac{1}{2}(e^{in\theta} + e^{-in\theta})$ och $\sin(n\theta) = \frac{1}{2i}(e^{in\theta} - e^{-in\theta})$ och identifierar koefficienterna i $\boxed{R}$ och $\boxed{K}$.

Då får vi:

$$\begin{cases} C_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad C_n = \frac{1}{2}(a_n - i\,b_n), \quad C_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + i\,b_n), \quad n = 1, 2, \dots \\ \Longleftrightarrow \\ a_0 = 2C_0, \quad a_n = C_n + C_{-n}, \qquad b_n = i\,(C_n - C_{-n}), \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Att bestämma C_n: Multiplicera $\boxed{K}$ med $e^{-ik\theta}$, $\int_{-\pi}^{\pi} \dots d\theta$, byt $\int_{-\pi}^{\pi} \dots$ & $\sum \dots$ fås

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-ik\theta}d\theta = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)\theta}d\theta = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n \begin{cases} \frac{e^{i(n-k)\theta}}{i(n-k)}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, & n \neq k \\ 2\pi, & n = k \end{cases}$$
$$= 2\pi C_k.$$

Byt k mot n, $\Longrightarrow$

$$\underline{C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta.}$$

Dvs. de *reella Fourierkoefficienterna* för 2π-periodiska funktionen $f(x)$ är:

$$a_0 = 2C_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)d\theta;$$

$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)d\theta$
är medelvärden av f på $[-\pi, \pi]$
samt i varje interval av längden 2π.

$$a_n = C_n + C_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)[e^{-in\theta} + e^{in\theta}] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos(n\theta)d\theta, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = i\,(C_n - C_{-n}) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)[e^{-in\theta} - e^{in\theta}] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin(n\theta)d\theta, \quad n = 1, 2, \dots$$

<u>f jämn</u>; $f(-\theta) = f(\theta) \Longrightarrow \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\cos(n\theta)d\theta, \qquad b_n = 0$

<u>f udda</u>; $f(-\theta) = -f(\theta) \Longrightarrow \quad a_n = 0, \qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\sin(n\theta)d\theta.$

Lemma 2.1. Om F är periodisk med perioden P: $F(P+a)=F(a)$; så är $\int_a^{a+P} F(x)dx$ oberoende av a.

Bevis. Vi har att

$$\begin{aligned} g(a) &:= \int_a^{a+P} F(x)dx = \int_0^{a+P} F(x)dx - \int_0^a F(x)dx, \implies \\ g'(a) &= F(a+P) - F(a) = F(a) - F(a) = 0. \end{aligned}$$

■

Exempel 1. $f(\theta) = |\theta|, \ \ -\pi < \theta < \pi, \ \ f$ är 2π-periodisk.

Lösning: f är jämn $\implies$ $b_n = 0$, och

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |\theta|\cos(n\theta)d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \theta\cos(n\theta)d\theta.$$

$$n=0 \implies a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \theta d\theta = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\theta^2}{2}\right]_0^\pi = \pi$$

$$n>0 \implies a_n = [PI] = \frac{2}{\pi}\left[\theta\cdot\frac{1}{n}\sin(n\theta)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{n}\sin(n\theta)d\theta\right].$$

$$\implies a_n = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2}\Big[\cos(n\theta)\Big]_0^\pi = \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1) = \begin{cases} \frac{-4}{\pi(2k-1)^2}, & n = 2k-1 \\ 0, & n = 2k. \end{cases}$$

Dvs

$$f(\theta) = |\theta| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)\theta,$$

Detta ger kvadratisk konvergens. Om $\theta = 0$ får vi,

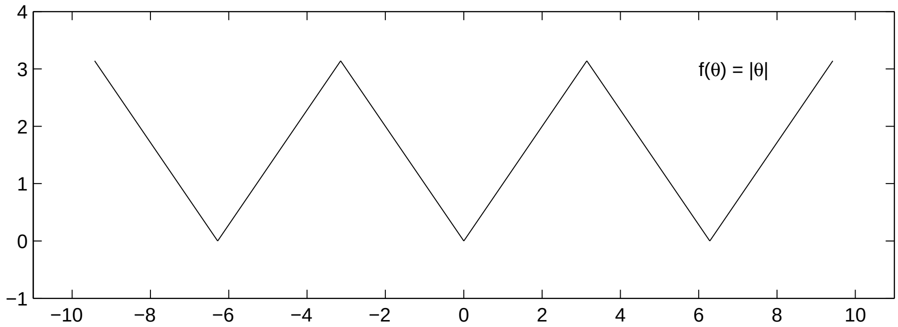
$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(2k-1)^2} \quad \implies \quad \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}(<2).$$

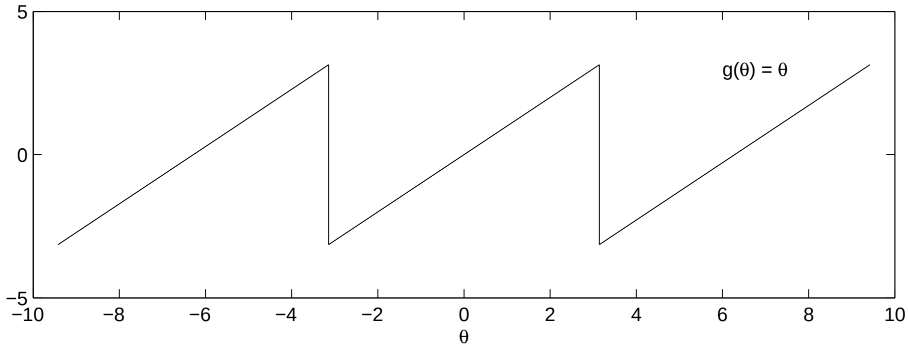
Exempel 2. $g(\theta) = \theta, \ \ -\pi < \theta < \pi, \ \ g$ är 2π-periodisk.

Lösning: g är udda $\implies$ $a_n = 0$, och

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \theta\sin(n\theta)d\theta = [PI] = \frac{2}{\pi}\left[\theta\frac{-1}{n}\cos(n\theta)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{-1}{n}\cos(n\theta)d\theta\right] \\ &= \frac{2}{\pi}\cdot\pi\frac{-1}{n}\cos(n\pi) = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad \implies \quad g(\theta) = \theta \sim 2\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(n\theta). \end{aligned}$$

Obs! serien konvergerar men som $\sum \frac{(-1)^n}{n}$. Alltså sämre är i Exempel 1 för $|\theta|$.





Anm. Funktionen $f(\theta) = |\theta|$ i Exemple 1 är kontinuerlig. Däremot $g(\theta) = \theta$, enligt Exemple 2 är styckvis kontinuerlig (detta pga periodicitet, see Figuren ovan). Alltså f i Exempel 1 är mer regulär än g i Exemple 2 och regularitet hos f ger snabbare konvergens av F-serien av f mot f.

Bessel's olikhet (I):

Funktionen f är 2π-periodisk och Riemann integrerbar på $[-\pi, \pi]$. C_n är de komplexa Fourierkoefficienterna till f. Då är

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta.$$

Bevis. Vi skall använda partiella summan $\sum_{-N}^{N} C_n e^{in\theta}$ av $\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\theta}$ enligt

(1)

$$\left| f(\theta) - \sum_{-N}^{N} C_n e^{in\theta} \right|^2 = \left(f(\theta) - \sum_{-N}^{N} C_n e^{in\theta} \right) \cdot \left(\overline{f(\theta)} - \sum_{-N}^{N} \bar{C}_n e^{-in\theta} \right)$$

$$= |f(\theta)|^2 - \sum_{-N}^{N} \left(C_n \overline{f(\theta)} e^{in\theta} + \bar{C}_n f(\theta) e^{-in\theta} \right) + \sum_{m,n=-N}^{N} C_m \bar{C}_n e^{i(m-n)\theta}.$$

(2)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)\theta}d\theta = \begin{cases} 0 & \text{om} \quad m \neq n \\ 1 & \text{om} \quad m = n. \end{cases}$$

(3)

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta) - \sum_{-N}^{N} C_n e^{in\theta}|^2 d\theta = \{(1)\ \&\ (2)\} = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 - \sum_{-N}^{N}(C_n\bar{C}_n + \bar{C}_n C_n) + \sum_{-N}^{N} |C_n|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta - \sum_{-N}^{N} |C_n|^2. \end{aligned}$$

Låt $N \to \infty$. ■

Anm:

$$\begin{aligned} |a_n|^2 + |b_n|^2 &= a_n\bar{a}_n + b_n\bar{b}_n \\ &= (C_n + C_{-n})(\bar{C}_n + \bar{C}_{-n}) + i(C_n - C_{-n})(-i)(\bar{C}_n - \bar{C}_{-n}) \\ &= 2C_n\bar{C}_n + 2C_{-n}\bar{C}_{-n} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |a_0|^2 = 4|C_0|^2 \\ |a_n|^2 + |b_n|^2 = 2\Big(|C_n|^2 + |C_{-n}|^2\Big), \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Bessel's olikhet (II):

$$\frac{1}{4}|a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(|a_n|^2 + |b_n|^2\Big) = \sum_{-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta.$$

Corollarium: $\max(a_n, b_n, |C_n|) \to 0$, då $n \to \infty$.

Bevis. $|a_n|^2, |b_n|^2, |C_n|^2$ är n:te termen i en konvergens serie. ■

Theorem 2.1. Om f är 2π-periodisk styckvis C^1 (dvs f' är styckvis kontinuerlig) på $\mathbb{R}$, så gäller för partiella summan av f:s Fourierserie utveckling att

$$S_N^f(\theta) := \sum_{-N}^{N} C_n e^{in\theta} \longrightarrow \frac{1}{2}\Big[f(\theta_-) + f(\theta_+)\Big], \qquad \text{då } N \to \infty.$$

Speciellt om f är kontinuerlig i θ så är $f(\theta) = \lim_{N\to\infty} S_N^f(\theta)$.

Nedan presenterar vi två olika metoder för att bevisa Theorem 2.1.

Metod I. Tillämpning av *Dirichlet kärna:*

I de Fourierserie utvieklingar av f:

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[a_n\cos(n\theta) + b_n\sin(n\theta)\Big] = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{in\theta},$$

betecknar vi koefficienterna som

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\cos(n\psi)d\psi, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\sin(n\psi)d\psi,$$

och

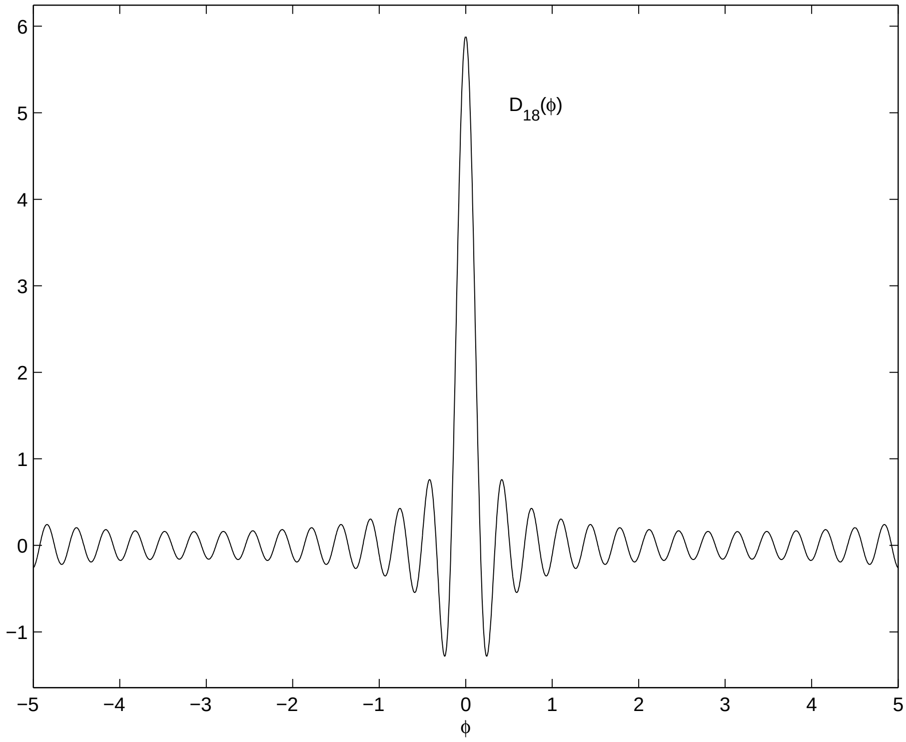
$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)e^{-in\psi}d\psi.$$

Då är den n:te partiella summan av f:s Fourierserie utveckling:

$$\begin{aligned}
S_N^f(\theta) &= \sum_{-N}^{N} C_n e^{in\theta} = \frac{1}{2\pi}\sum_{-N}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)e^{in(\theta-\psi)}d\psi = \{n \curvearrowright -n\}\\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{-N}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)e^{in(\psi-\theta)}d\psi = \left\{\begin{array}{c}\phi = \psi-\theta\\ d\phi = d\psi\end{array}\right\}\\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{-N}^{N}\int_{-\pi-\theta}^{\pi-\theta} f(\phi+\theta)e^{in\phi}\,d\phi = \{f \text{ är } 2\pi - \text{periodisk}\}\\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{-N}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} f(\phi+\theta)e^{in\phi}d\phi = \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi+\theta)\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\sum_{-N}^{N} e^{in\phi}\right)}_{D_N(\phi)}d\phi\\
&\equiv \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi+\theta)D_N(\phi)d\phi. \qquad \underline{D_N(\phi) := \text{Dirichlet kärna.}}
\end{aligned}$$

Villkor hos $D_N(\phi)$:

$$\begin{aligned}
D_N(\phi) &= \frac{1}{2\pi}\Big(e^{-iN\phi} + e^{-i(N-1)\phi} + \cdots + 1 + e^{i\phi} + e^{2i\phi} + \cdots + e^{iN\phi}\Big)\\
&= \frac{1}{2\pi}e^{-iN\phi}\Big[1 + e^{i\phi} + \cdots + e^{i2N\phi}\Big] = \{\text{summan av geom. serie}\}\\
&= \{\phi \neq 0\} = \frac{1}{2\pi}e^{-iN\phi}\frac{1-e^{i(2N+1)\phi}}{1-e^{i\phi}} = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{i(N+1)\phi} - e^{-iN\phi}}{e^{i\phi}-1}\\
&= \times\left\{\frac{e^{-i\phi/2}}{e^{-i\phi/2}}\right\} = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{i(N+\frac{1}{2})\phi} - e^{-i(N+\frac{1}{2})\phi}}{e^{i\phi/2} - e^{-i\phi/2}} = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(N+\frac{1}{2})\phi}{\sin(\frac{1}{2}\phi)}.
\end{aligned}$$



Lemma 2.2 (Lemma 2.4 i Folland.) $\forall N$:

$$\int_{-\pi}^{0} D_N(\theta)d\theta = \int_{0}^{\pi} D_N(\theta)d\theta = \frac{1}{2}$$

Bevis.

$$D_N(\theta) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-N}^{N} e^{in\theta} = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\sum_{1}^{N}\left(e^{in\theta} + e^{-in\theta}\right) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{1}^{N}\cos(n\theta) \Longrightarrow$$

$$\int_{0}^{\pi} D_N(\theta)d\theta = \left[\frac{\theta}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{1}^{N}\frac{\sin(n\theta)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}. \qquad \text{p.s.s.} \qquad \int_{-\pi}^{0} D_N(\theta)dt = \frac{1}{2}.$$

■

Bevis av Theorem 2.1 enligt Metod I.

Theorem 2.1 $\Longleftrightarrow S_N^f(\theta) - \frac{1}{2}\Big[f(\theta_-) + f(\theta_+)\Big] \longrightarrow 0$, då $N \longrightarrow \infty$.

Men enligt Lemma 2.2:

$$S_N^f(\theta) - \frac{1}{2}\Big[f(\theta_-) + f(\theta_+)\Big] = \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi+\theta) D_N(\phi) d\phi - \frac{1}{2}\Big[f(\theta_-) + f(\theta_+)\Big]$$

$$= \int_{-\pi}^{0} \Big[f(\theta+\phi) - f(\theta_-)\Big] D_N(\phi) d\phi + \int_{0}^{\pi} \Big[f(\theta+\phi) - f(\theta_+)\Big] D_N(\phi) d\phi$$

$$= \Big\{ D_N(\phi) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(N+1)\phi} - e^{-iN\phi}}{e^{i\phi} - 1} \Big\} =: \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) \Big(e^{i(N+1)\phi} - e^{-iN\phi} \Big) d\phi,$$

där

$$g(\phi) = \begin{cases} \frac{f(\theta+\phi) - f(\theta_-)}{e^{i\phi}-1}, & \text{om} \quad -\pi < \theta < 0 \\ \frac{f(\theta+\phi) - f(\theta_+)}{e^{i\phi}-1}, & \text{om} \quad 0 < \theta < \pi. \end{cases}$$

Obs! g lika regulär some f utom i "0". L'Höpital $\Longrightarrow$

$$\lim_{\phi \to 0\pm} g(\phi) = \lim_{\phi \to 0\pm} \frac{f(\theta+\phi) - f(\theta_\pm)}{e^{i\phi} - 1} = \lim_{\phi \to 0\pm} \frac{f'(\theta+\phi)}{ie^{i\phi}} = \frac{f'(\theta \pm 0)}{i}.$$

Alltså g är styckvis kontinuerlig. Då enligt corollarium för Bessel's olikhet

$$C_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\phi) e^{-in\phi} d\phi \to 0, \text{ då } n \to \pm\infty.$$

Men

$$S_N^f(\theta) - \frac{f(\theta_-) + f(\theta_+)}{2} = C_{-(N+1)}(g) - C_N(g) \to 0 - 0 = 0, \text{ då } N \to \infty.$$

Bevis av Theorem 2.1 enligt Metod II

Theorem 2.1. Om f är 2π-periodisk och f' är syckvis kontinuerlig på $\mathbb{R}$, då

$$S_N^f(\theta) \longrightarrow \frac{1}{2}\Big[f(\theta_-) + f(\theta_+)\Big], \quad N \longrightarrow \infty. \qquad S_N^f(\theta) = \sum_{-N}^{N} C_n(f) e^{in\theta}.$$

Hjälpsats (Lemma 2. 3): Låt $C_n(f) = C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{in\theta} d\theta$, då gäller

(a) $C_n(\alpha f + \beta g) = \alpha C_n(f) + \beta C_n(g); \quad \alpha, \beta$ konstanter $\Rightarrow C_n$ är linjärt.

(b) $$C_n(1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} d\theta = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2\pi} \Big[\frac{-1}{in} e^{-in\theta}\Big]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\sin(n\pi)}{n\pi} = 0, n \neq 0 \\ \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta = 1, \qquad \text{om } n = 0 \end{array} \right\} = \delta_{n0}$$

(c) $C_n(e^{ik\theta}f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta} f(\theta) e^{-in\theta} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-i(n-k)\theta} d\theta = C_{n-k}(f).$

Bevis av Sats 2.1 i kontinuitetspunkter: Antag att f är kontinuerlig i θ_0.

Sätt $g(\theta) \overset{(*)}{=} \frac{f(\theta)-f(\theta_0)}{e^{i\theta}-e^{i\theta_0}}$. Då är

$$\lim_{\theta\to\theta_0\pm} g(\theta) = \frac{0}{0} = \lim_{\theta\to\theta_0\pm} \frac{f'(\theta)}{ie^{i\theta}} = \frac{f'(\theta_0\pm)}{ie^{i\theta_0\pm}}. \quad (f' \text{ styckvis kont.} \Rightarrow g \text{ styckvis kont.})$$

$(*) \Longleftrightarrow f(\theta) = f(\theta_0) + e^{i\theta} g(\theta) - e^{i\theta_0} g(\theta).$ Tillämpning av Lemma 2.3 $\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} C_n(f) &= C_n[f(\theta_0) + e^{i\theta} g(\theta) - e^{i\theta_0} g(\theta)] \\ &= f(\theta_0)C_n(1) + C_{n-1}(g) - e^{i\theta_0}C_n(g) = f(\theta_0)\delta_{n0} + C_{n-1}(g) - e^{i\theta_0}C_n(g). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_N^f(\theta_0) &= \sum_{-N}^{N} C_n(f)e^{in\theta_0} = \sum_{-N}^{N} \Big[f(\theta_0)\delta_{n0} + C_{n-1}(g) - e^{i\theta_0}C_n(g)\Big] e^{in\theta_0} \\ &= f(\theta_0) + \sum_{-N}^{N} \Big[\underbrace{C_{n-1}(g)e^{in\theta_0}}_{r_n} - \underbrace{C_n(g)e^{i(n+1)\theta_0}}_{r_{n+1}}\Big] = \{\text{Teleskope serie}\} \\ &= f(\theta_0) + (r_{-N} - r_{-N+1}) + (r_{-N+1} - r_{-N+2}) + \cdots + (r_N - r_{N+1}) \\ &= f(\theta_0) + r_{-N} - r_{N+1}. \end{aligned}$$

Bessel's olikhet $\Rightarrow |r_n| = |C_{n-1}(g)e^{in\theta_0}| = |C_{n-1}(g)| \to 0,$ då $|n| \to \infty$.

$\nwarrow$ g st. kont.

$\because \quad S_N^f(\theta_0) \longrightarrow f(\theta_0),$ då $N \longrightarrow \infty$. ■

Derivator, Primitiva funktioner

Theorem 2.2. Antag f är 2π-periodisk kontinuerlig, f' är styckvis kontinuerlig. Om a_n, b_n, C_n är $\mathcal{F}$-koeff. för f, och a_n', b_n' och C_n' $\mathcal{F}$-koeff. för f'. Då är

$$a_n' = nb_n, \qquad b_n' = -na_n, \qquad C_n' = inC_n.$$

Bevis.

$$\begin{aligned} b_n' &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(\theta)\sin(n\theta)d\theta = [PI] = \frac{1}{\pi}\Big[f(\theta)\sin(n\theta)\Big]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)n\cos(n\theta)d\theta \\ &= -n\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos(n\theta)d\theta = -na_n. \qquad \text{P.s.s. } a_n' = nb_n \quad \text{och} \quad C_n' = inC_n : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n' &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(\theta)\cos(n\theta)d\theta = [PI] = \frac{1}{\pi}\Big[f(\theta)\cos(n\theta)\Big]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)(-n)\sin(n\theta) \\ &= \frac{1}{\pi}[f(\pi)\cos(n\pi) - f(-\pi)\cos(-n\pi)] + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin(n\theta)d\theta \\ &= \frac{1}{\pi}(-1)^n[f(\pi) - f(-\pi)] + nb_n = \{f 2\pi\text{periodisk} \Rightarrow f(\pi) = f(-\pi)\} = nb_n. \end{aligned}$$

Alternativ bevis för Theorem 2.2. Om f 2π-periodisk styckvis kontinuerlig

$$\begin{aligned} f(\theta) &\cong \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{in\theta} \overset{(*)}{=} \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta\Big) = \frac{1}{2}\Big[f(\theta_-) + f(\theta_+)\Big] \\ f'(\theta) &\cong \sum_{-\infty}^{\infty} C_n' e^{in\theta} = \frac{1}{2}a_0' + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n'\cos n\theta + b_n'\sin n\theta\Big) = \{\text{derivatan av } (*)\} \\ &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} inC_n e^{in\theta} = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(-na_n\sin n\theta + nb_n\cos\theta\Big) = \frac{1}{2}\Big[f'(\theta_-) + f'(\theta_+)\Big]. \end{aligned}$$

identif. av koeff. $\Longrightarrow \quad C_n' = inC_n \ (C_0 \equiv 0), \quad a_n' = nb_n \quad$ och $\quad b_n' = -na_n.$ ■

Theorem 2.3. Antag att f är 2π-periodisk, kontinuerlig f, f', f'' är styckvis kontinuerliga. Om $f(\theta) \cong \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} \equiv \frac{1}{2}a_0 + \sum_1^{\infty}(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta)$, så är

$$f'(\theta) \cong \sum_{-\infty}^{\infty} inC_n e^{in\theta} \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\Big(nb_n\cos(n\theta) - na_n\sin(n\theta)\Big) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{i } f' \text{ s diskont. punkter}}}{\longrightarrow} \tfrac{1}{2}\Big[f'(\theta_-) + f'(\theta_+)\Big]$$

Bevis. f', f'' styckvis kont. Thm 2.1, 2.2 $\Longrightarrow \begin{cases} f' \text{ är } \mathcal{F}\text{-serie med } \mathcal{F}\text{-koeff} \\ nb_n, \ -na_n, \ \text{och } \ inC_n. \end{cases}$ ■

Anm. $f(\theta) = 1$ periodisk; $F = \int f(\theta)d\theta = \theta$ ej periodisk. En periodisk funktion f har en periodisk integral F, omm konstanten i $\mathcal{F}$-serien för f är 0, dvs

$$\frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)d\theta = 0.$$

Theorem 2.4. f 2π-periodisk, st. kont. $F(\theta) = \int_0^\theta f(\psi)d\psi$; och $C_0 = \frac{1}{2}a_0 = 0$. Då är $F(\theta) = \bar{C}_0 + \sum_{n\neq 0} \frac{C_n}{in}e^{in\theta} \equiv \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}\sin(n\theta) - \frac{b_n}{n}\cos(n\theta)\right)$ med

$$\bar{C}_0 = \frac{1}{2}A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\theta)d\theta.$$

Bevis av Theorem 2.4. f styckvis kontinuerlig $\Rightarrow F = \int f$ kontinuerlig, $F' = f$ syckvis kontinuerlig. $C_0 = 0 \Longrightarrow F$ är 2π-periodisk, ty

$$\begin{aligned} F(\theta+2\pi) - F(\theta) &= \int_0^{\theta+2\pi} f(\psi)d\psi - \int_0^{\theta} f(\psi)d\psi = \int_\theta^{\theta+2\pi} f(\psi)d\psi \\ &= \{f,\, 2\pi - \text{periodisk}\} = \int_0^{2\pi} f(\psi)d\psi = 2\pi C_0 = 0. \end{aligned}$$

Theorem 2.1. $\Rightarrow F(\theta) \sim$ av sin $\mathcal{F}$-serie utveckling i (θ).

Theorem 2.2. $\Rightarrow A_n = -\frac{b_n}{n}, B_n = \frac{a_n}{n}$ och $\tilde{C}_n = \frac{C_n}{in}(n \neq 0)$ är $\mathcal{F}$-koeff. till F. ■

Anm. Om $C_0 \neq 0$, då Theorem 2.4 gäller för $F(\theta) - C_0\theta$, dvs

$$F(\theta) - C_0\theta = \bar{C}_0 + \sum_{n\neq 0}\frac{C_n}{c_n}e^{in\theta} = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-b_n}{n}\cos(n\theta) + \frac{a_n}{n}\sin(n\theta)\right).$$

Alternativ bevis av Theorem 2.4. Om $\frac{1}{2}a_0 = C_0 = 0$, då $F(\theta) = \int_0^\theta f(\phi)d\phi$ satisfierar

$$\int f(\theta)d\theta = \{\text{integrera } (*)\} = \bar{C}_0 + \sum_{n\neq 0}\frac{C_n}{in}e^{in\theta} = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}\sin n\theta + \frac{-b_n}{n}\cos n\theta\right)$$

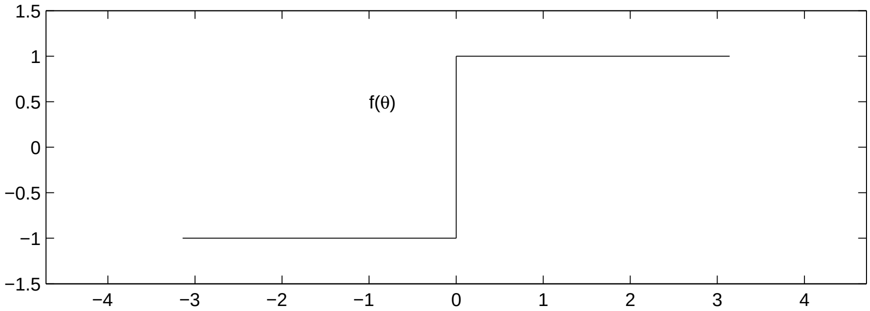
identifiering av koefficienter $\Longrightarrow$,

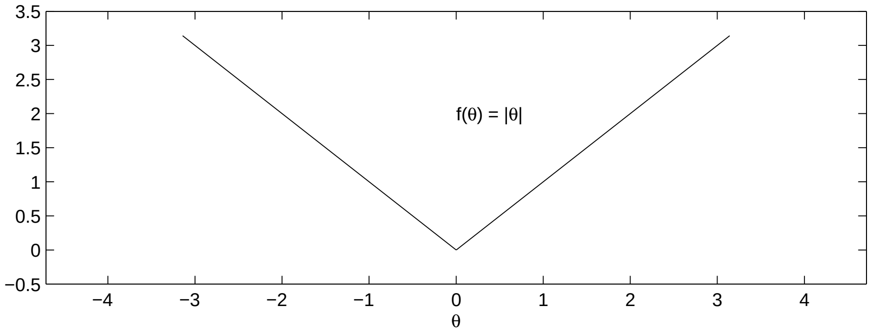
$A_0 = 2C_0, \qquad A_n = -\frac{b_n}{n} \quad n \geq 1, \qquad B_n = \frac{a_n}{n} \quad n \geq 1, \qquad \tilde{C}_n = \frac{C_n}{in}, \quad (n \neq 0).$ ■

Exempel 3. Fourierserie utveckla integralen av

$$f(\theta) = \begin{cases} 1, & 0 < \theta < \pi \\ -1, & -\pi < \theta < 0 \end{cases}, \quad f \; 2\pi\text{-periodisk.}$$

Lösning. f är udda $(f(0) \stackrel{!}{=} 0) \Longrightarrow a_n = 0$





$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\theta)\sin(n\theta)\,d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(n\theta)d\theta = -\frac{2}{\pi}\Big[\frac{1}{n}\cos(n\theta)\Big]_0^\pi$$
$$= -\frac{2}{n\pi}\Big((-1)^n - 1\Big) = \begin{cases} \frac{4}{(2k-1)\pi}, & n = 2k-1 \\ 0, & n = 2k \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \qquad f(\theta) \sim \sum_{n=1}^\infty b_n \sin(n\theta) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)}\sin(2n-1)\theta.$$

$\Rightarrow \mathcal{F}$-serie för $F(\theta) = |\theta|$, för $|\theta| < \pi$ är

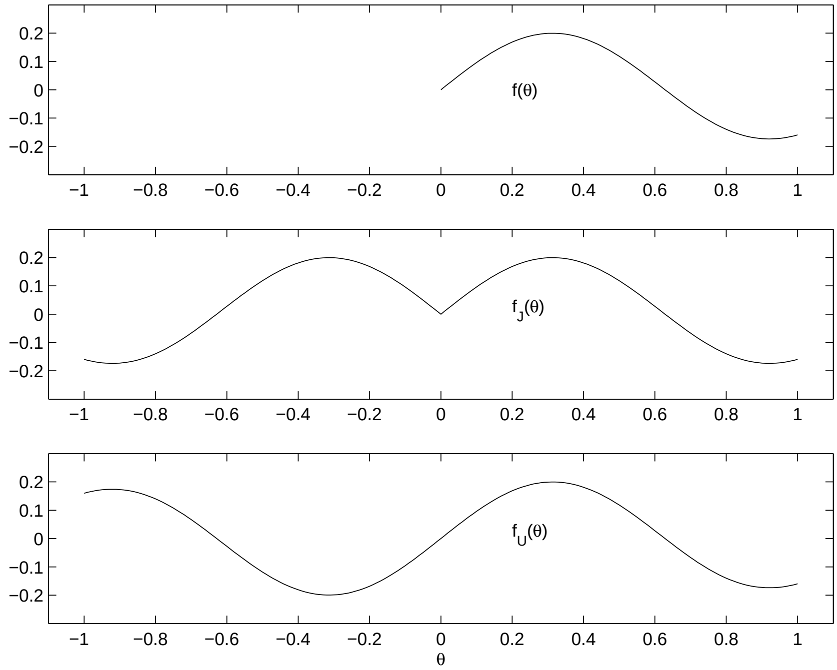
$$F(\theta) = \int_0^\theta f(\phi)d\phi = \{F \text{ kont.}\} = \bar{C}_0 - \frac{4}{\pi}\sum_1^\infty \frac{\cos(2n-1)\theta}{(2n-1)^2}, \quad \text{med}$$
$$\bar{C}_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi F(\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi |\theta|d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \theta d\theta = \frac{\pi}{2}. \qquad \text{Jfr. med Exemple 1.}$$

Fourier serier på intervall

Antag att f är def. på $[0,\pi]$. Vi vill göra f till en 2π-periodisk funktion, genom

1. Jämn utvidgning: $f_J(-\theta)=f(\theta); \quad \theta\in(0,\pi]$.

2. Udda utvidgning: $f_u(-\theta)=-f(\theta); \quad \theta\in(0,\pi], \quad f_u(0)=0$.



Anm. $\mathcal{F}$-serien för f_J:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_J(\theta)\cos(n\theta)d\theta=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(\theta)\cos(n\theta)d\theta$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_J(\theta)\sin(n\theta)d\theta=0$$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{F}$-serien för f_J är *Fourier cosinus serie*: $\quad f_J\sim\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\theta)$.

P.s.s. $\mathcal{F}$-serien för f_u:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_u(\theta)\cos(n\theta)d\theta=0$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_u(\theta)\sin(n\theta)d\theta=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(\theta)\sin(n\theta)d\theta$$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{F}$-serien för f_u är *Fourier sinus serie*: $\quad f_u\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\theta)$.

Fourier serier, allmänt intervall

Antag f är $2L$-periodisk. Variabelsubstitutionen $x = \frac{L\theta}{\pi}$ ger att

$g(\theta) = f(x) = f(\frac{L\theta}{\pi})$ är 2π-periodisk, ty

$$g(\theta + 2\pi) = f\Big(\frac{L(\theta+2\pi)}{\pi}\Big) = f\Big(\frac{L\theta}{\pi} + 2L\Big) = f\Big(\frac{L\theta}{\pi}\Big) = g(\theta).$$

$\mathcal{F}$-serien för g:

$$g(\theta) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{in\theta}, \quad C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)e^{-in\theta}d\theta, \quad \Longrightarrow$$

$$\{\theta = \frac{\pi x}{L}, \quad d\theta = \frac{\pi}{L}dx, \quad \theta = \pm\pi \longleftrightarrow x = \pm L\}$$

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{\frac{in\pi x}{L}}, \; C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L} f(x)e^{\frac{-in\pi x}{L}}\frac{\pi}{L}dx = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-\frac{in\pi x}{L}}dx.$$

Följaktligen gäller

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\Big), \qquad \text{med}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \qquad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx.$$

$$f \text{ jämn} \overset{b_n=0}{\Longrightarrow} \quad f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{L}, \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$f \text{ udda} \overset{a_n=0}{\Longrightarrow} \quad f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{L}, \qquad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx.$$

Exempel 4. Finn Fourier cosinus och sinus utvecklingen för $f(x) = x$ på $[0, L]$.

$\mathcal{F}$-cos: Utvidga f till en 2L-periodiska jämn funktion f_C på $[-L, L]$:

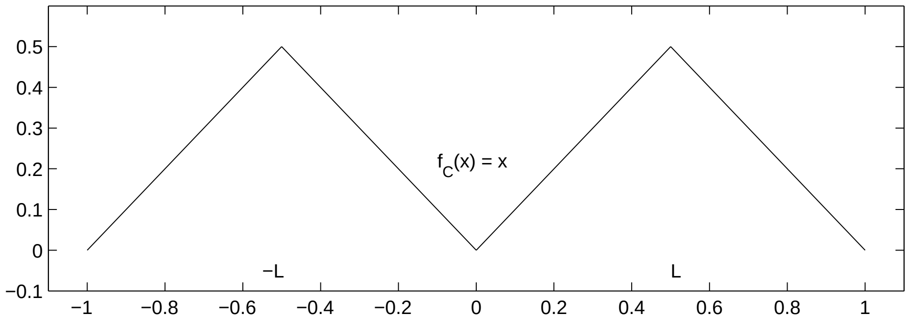
$$b_n = 0, \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L x\cos\frac{n\pi x}{L}dx \quad \Longrightarrow \quad a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L xdx = \frac{2}{L}\Big(\frac{x^2}{2}\Big)_0^L = L$$

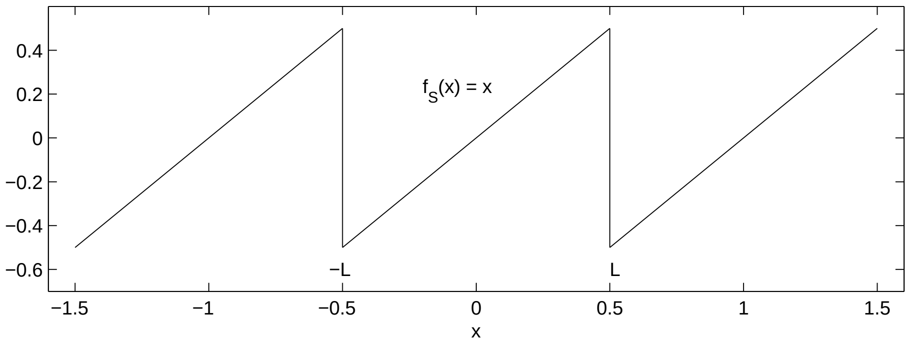
$$a_n = \{n \neq 0\} \overset{[PI]}{=} \frac{2}{L}\Big(x \cdot \frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L}\Big|_0^L - \int_0^L \frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L}dx\Big) = \frac{2}{L}\Big(\frac{L}{n\pi}\Big)^2\Big(\cos\frac{n\pi x}{L}\Big)_0^L$$

$$= \frac{2L}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - \cos 0) = \frac{2L}{n^2\pi^2}\Big((-1)^n - 1\Big) = \begin{cases} \frac{-4L}{(2k-1)^2\pi^2}, & n = 2k-1 \\ 0, & n = 2k. \end{cases}$$

Vidare är $f(x) = |x|$ är styckvis deriverbar $\Longrightarrow$ för $0 < x < L$

$$f(x) = x = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} = \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)\frac{\pi x}{L} = f_C(x).$$





$\mathcal{F}$**-sin:** Utvidga f till en $2L$-periodisk udda funktion f_s på $[-L, L]$:

$$\begin{aligned} a_n = 0, \qquad b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L x\sin\frac{n\pi x}{L}dx \\ &= \frac{2}{L}\Big(x\frac{-L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\Big|_0^L - \int_0^L -\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\Big) \\ &= \frac{2}{L}\cdot\frac{-L^2}{n\pi}\cos(n\pi) = (-1)^{n+1}\frac{2L}{n\pi} \end{aligned}$$

f kontinuerlig på $(0, L) \Longrightarrow \quad f(x) = x = \sum_1^\infty b_n \sin\frac{n\pi x}{L} = \frac{2L}{\pi}\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{L}$.

Observera att båda utvecklingar gäller för $x \in (0, L)$. Mao, för $x \in (0, L)$

$$x = \frac{2L}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{L} = \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)\frac{\pi x}{L}.$$

Detta gäller även för $x = 0$:

$$0 = \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \iff \frac{4L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{L}{2}.$$

$$\because \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

■

(Den uppmärksamma läsaren Hej på Dig!, känner igen detta.)