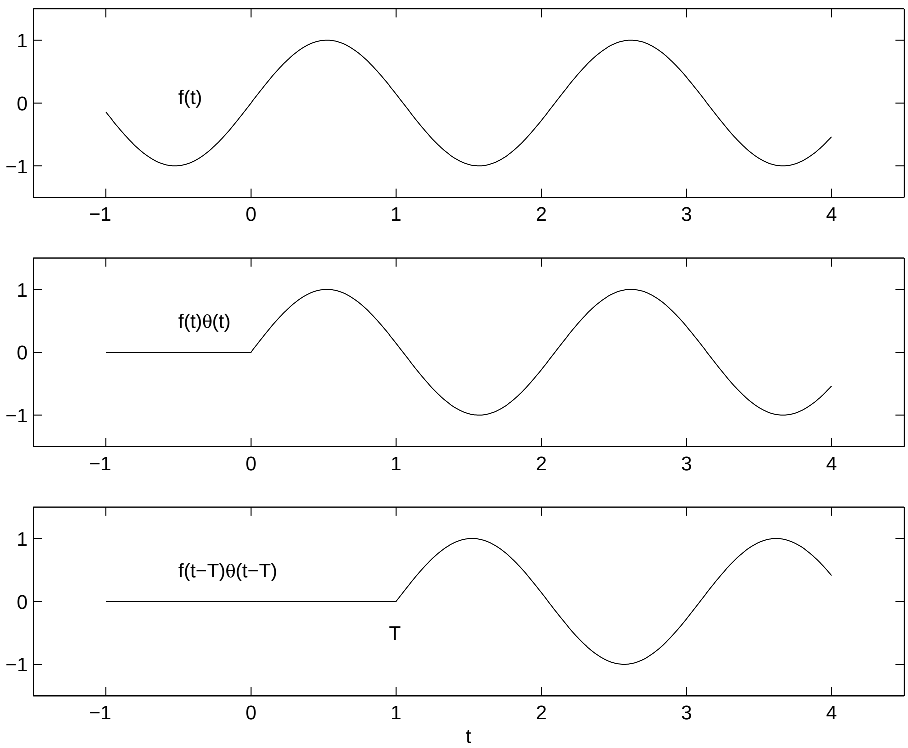
Laplace Transformer

Heavisides funktion $H(t)$ definieras av $H(t) := \theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{för} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{för} \quad t < 0. \end{cases}$

Om f är definierad på $\mathbb{R}$, då är $f(t)\theta(t) = \begin{cases} f(t), & \text{för} \quad t \geq 0 \\ 0, & \text{för} \quad t < 0. \end{cases}$



Definition. Antag att

(i) $f(t) = 0$ för $t < 0$, (annars ersätt f med $f\theta$).

(ii) f är styckvis kontinuerlig på $\mathbb{R}^+$ (detta betecknas som $f \in \mathcal{E}$), samt

(iii) f satisfierar

$$|f(t)| \leq Ce^{at}, \; a \in \mathbb{R}, \;\; C \text{ är konstant.}$$

Då är *Laplacetransformen* $F(s)$ av $f(t)$ definerad enligt

$$\boxed{L[f(t)](s) := F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt, \text{ där } s = \alpha + i\beta \text{ med } \alpha = \text{Re }(s) > a.}$$

Observera att

$$|F(s)| \leq \int_0^\infty |f(t)e^{-st}| dt \leq C \int_0^\infty e^{at} e^{-Re(s)t} dt = C \int_0^\infty e^{(a-Re(s))t} dt,$$

konvergerar endast då $\underline{\mathrm{Re}\ (s) > a}$.

Anm*. Om $f(t) = 0$ för $t < 0$, då $F(s) = \hat{f}(-is)$. Här $\hat{f}$ är *Fouriertransformen* av f.

Lemma 1*. Om $f \in \mathcal{E}, |f(t)| \leq Ce^{at}$, då gäller

a) $L[f(t)](x+iy) \to 0$, då $|y| \to \infty$ för varje fixt $x > a$.

b) $L[f(t)](x+iy) \to 0$, då $x \to \infty$, y godtycklig ($x = \mathrm{Re}\ (s) > a \Longrightarrow x \not\to -\infty$.)

Bevis*.

a) $$L[f(t)](x+iy) = \int_0^\infty e^{-(x+iy)t} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-xt} f(t) e^{-iyt} dt := \int_0^\infty g(t) e^{-iyt} dt := \hat{g}(y),$$

där $g(t) = e^{-xt} f(t)$ ger $g(t) = 0$ för $t < 0$, då $f(t) = 0$ för $t < 0$. Men $g(t) \in L^1$, ty

$$\int_0^\infty |g(t)|dt = \int_0^\infty e^{-xt}|f(t)|dt \leq C \int_0^\infty e^{(a-x)t} dt < \infty \quad \text{för} \quad x > a.$$

$$g \in L^1 \Rightarrow \hat{g} \in L^1, \text{ då måste } \hat{g}(y) \to 0 \text{ då } |y| \to \infty.$$

b) $x \to \infty \Longrightarrow x > a+1 \Longrightarrow |f(t)e^{-(x+iy)t}| \leq Ce^{-t} \Longrightarrow$

$$\lim_{x\to\infty} \mathcal{L}[f(t)](x+iy) = \lim_{x\to\infty} \int_0^\infty e^{-(x+iy)t} f(t)dt = \{\text{Lebesgue dominerad konvergens sats}\}$$
$$= \int_0^\infty \lim_{x\to\infty} e^{-(x+iy)t} f(t)dt = \int_0^\infty \underbrace{f(t)}_{\text{begr}} \underbrace{\{\cos(yt) - i\sin(yt)\}}_{\text{begr}} \lim_{x\to\infty} e^{-xt} dt = 0.$$

■

Theorem 1. Antag att $f \in \mathcal{E}$, $a > 0$, och c är komplex tal. Då gäller

a1) $L[\theta(t-a)f(t-a)](s) = e^{-as}F(s)$.

a2) $L[e^{ct}f(t)](s) = F(s-c)$.

b) $L[f(at)](s) = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$. (skalning)

c) Om f är kontinuerlig och $f' \in \mathcal{E}$ då $L[f'(t)](s) = sF(s) - f(0_+)$.

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](s) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(0_+)}$$

d) $L[\int_0^t f(\tau)d\tau](s) = \frac{1}{s}F(s)$.

e) $L[tf(t)](s) = -F'(s) \qquad \dots \quad \Longrightarrow \boxed{F^{(n)}(s) = (-1)^n L[t^n f(t)](s)}$

f) Om $t^{-1}f(t) \in \mathcal{E}$, så

$$L[t^{-1}f(t)](s) = \int_0^\infty F(\omega)d\omega.$$

g) Observera att om $f(t) = 0,\ g(t) = 0$ för $t < 0$, då gäller

$$(f * g)(t) = \begin{cases} \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau, & t \geq 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$L[f * g](s) = F(s)G(s).$$

Bevis.

a1)

$$L[\theta(t-a)f(t-a)] = \int_0^\infty e^{-st}\theta(t-a)f(t-a)dt = \int_{-\infty}^\infty e^{-st}f(t-a)\theta(t-a)dt$$

$$= \{\tau = t-a\} = \int_{-\infty}^\infty e^{-s(\tau+a)}f(\tau)\theta(\tau) = e^{-as}\int_0^\infty e^{-s\tau}f(\tau)d\tau = \underline{e^{-as}F(s)}.$$

a2)

$$L[e^{ct}f(t)](s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{ct}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(s-c)t}f(t)dt = \underline{F(s-c)}.$$

b)

$$L[f(at)](s) = \{a > 0\} = \int_0^\infty e^{-st}f(at)dt = \{\tau = at\} = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}\tau}f(\tau)d\tau = \underline{\frac{1}{a}F\Big(\frac{s}{a}\Big)}.$$

c)

$$L[f'(t)](s) = \int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt = [PI] = [e^{-st}f(t)]_0^\infty - \int_0^\infty -se^{-st}f(t)dt$$

$$= -f(0_+) + s\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \underline{sF(s) - f(0_+)}.$$

$$\uparrow$$

$$\{|f(t)| \leq Cc^{at} \quad \& \quad \mathrm{Re}(s) > a \Longrightarrow \lim_{t\to\infty}(e^{-st}f(t)) = 0\}$$

d) Sätt $h(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$ då är $h'(t) = f(t)$ & $h(0) = 0$. Laplacetransform cf. c) ger

$$-\underbrace{h(0)}_{=0} + sH(s) = F(s) \Longrightarrow \underline{H(s) = \frac{1}{s}F(s)}.$$

e) Derivering av $F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$, m.a.p. s ger

$$F'(s)=\int_0^\infty e^{-st}(-tf(t))dt \Longrightarrow \underline{F'(s)=-L[tf(t)](s).}$$

f) Sätt $g(t)=t^{-1}f(t)$, då $f(t)=tg(t)$. Laplacetransform enligt e) ger att $F(s)=-G'(s)$

$$\Longrightarrow \quad G(s)=\int_s^\infty F(\omega)d\omega, \quad \text{ty } G(s)\to 0, \text{ då } s\to\infty.$$

g)

$$L[f(*g)(t)](s)=\int_0^\infty e^{-st}\Big\{\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\Big\}dt=\{\text{byt integrationsordning}\}$$
$$=\int_0^\infty g(\tau)\Big\{\int_\tau^\infty e^{-st}f(t-\tau)dt\Big\}d\tau=\int_0^\infty e^{-s\tau}g(\tau)\Big\{\int_\tau^\infty e^{-s(t-\tau)}f(t-\tau)dt\Big\}d\tau$$
$$=\{r=t-\tau\}=\int_0^\infty e^{-s\tau}g(\tau)\Big(\int_0^\infty e^{-sr}f(r)dr\Big)d\tau=\underline{F(s)G(s).}$$

Lemma 2. $\underline{L[t^p](s)=\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}},}$ tag p positiv (allmänt Re $p>-1$)

Bevis.

$$L[t^p](s)=\int_0^\infty t^pe^{-st}dt=\{x=st\Longrightarrow t=\frac{x}{s},\ dt=\frac{1}{s}dx\}=\frac{1}{s^{p+1}}\int_0^\infty x^pe^{-x}dx=\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}.$$

$\blacksquare$

Corollarium:

$$e^{at}f(t)\overset{L}{\supset}F(s-a) \quad \overset{Lemma2}{\Longrightarrow} \quad e^{at}t^p\overset{L}{\supset}\frac{\Gamma(p+1)}{(s-a)^{p+1}}.$$
$$\{p=n=\text{heltal}\}\Longrightarrow e^{at}t^n\overset{L}{\supset}\frac{\Gamma(n+1)}{(s-a)^{n+1}}=\frac{n!}{(s-a)^{n+1}};\quad n=0,1,\ldots$$

Specialfall: Om $a=0$ så är $\quad t^n\overset{L}{\supset}\frac{n!}{s^{n+1}};\qquad t^{p-1}\overset{L}{\supset}\frac{\Gamma(p)}{s^p},\quad p>0.$

$1\overset{!}{=}\theta(t)\overset{L}{\supset}\frac{1}{s}$, ty $\int_0^\infty e^{-st}\theta(t)dt=\int_0^\infty e^{-st}dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty=\frac{1}{s}$ gäller för Re$(s)>0$.

OBS! $\theta(t)=\left\{\begin{array}{ll}1, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{array}\right\}\Rightarrow|\theta(t)|\leq Ce^{at}$ (sätt $a=0, C=1$).

Theorem 1. $\Rightarrow$

$$e^{iat}\theta(t) \overset{L}{\supset} \frac{1}{s-ia} \qquad \wedge \qquad e^{-iat} \overset{L}{\supset} \frac{1}{s+ia} \qquad \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l|l} [\cos(at)](s) \overset{L}{\supset} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-ia} + \frac{1}{s+ia}\right) = \frac{s}{s^2+a^2} & \text{Obs!} \\ & \text{Cut-off mod } \theta(t) \\ [\sin(at)](s) \overset{L}{\supset} \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-ia} - \frac{1}{s+ia}\right) = \frac{a}{s^2+a^2} & \text{är medtagen!} \end{array}$$

Theorem 2*. Antag $f \in \mathcal{E}, |f(t)| \leq ce^{at}$ och $b > a$ då gäller **inversionssatsen:**

$$f(t) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{b-ir}^{b+ir} F(s)e^{st}ds, \qquad \left(= \frac{1}{2}[f(t_-) + f(t_+)], \quad \text{då } f \text{ ej kontinuerlig i } t\right).$$

Bevis*. Låt $g(t) = e^{-bt}f(t)$, då $g(t) = 0$ för $t < 0$ och för $b > a, g \in L^1$.

$\mathcal{F}$-transform $\Longrightarrow$

$$\hat{g}(\xi) = \int_0^\infty e^{-bt}f(t)e^{-i\xi t}dt = L[f(t)](b + i\xi) = F(b + i\xi).$$

Invers $\mathcal{F}$-transform $\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} e^{-bt}f(t) = g(t) &= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-r}^{r} \hat{g}(\xi)e^{i\xi t}d\xi = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-r}^{r} F(b + i\xi)e^{i\xi t}d\xi \\ &= \{b + i\xi = s \Rightarrow d\xi = \frac{1}{i}ds\} = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{b-ir}^{b+ir} F(s)e^{(s-b)t}dt \\ &\Leftrightarrow \{\cdot e^{bt}\} \Leftrightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{r\to\infty}\int_{b-ir}^{b+ir} e^{st}F(s)ds. \end{aligned}$$

■

Lemma 3*. Låt $a > 0$, då

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{a^2}{4t}} \overset{L}{\supset} \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}}_{(*)} \qquad\qquad \underbrace{\frac{a}{\sqrt{4\pi t^3}}e^{\frac{-a^2}{4t}} \overset{L}{\supset} e^{-a\sqrt{s}}}_{(**)}$$

Bevis*. Med residue kalkyl (H.ö.)

Exempel 1. Söker begränsade lösningen till värmeledningsekvationen:

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & t>0, \quad x>0 \quad (DE) \\ u(0,t)=f(t), & u(x,0)=0 \qquad (RV)+(BV). \end{cases}$$

Lösning. Sätt $U(x,s) = L_t[u(x,t)](s)$

L-transform av (DE) $\Longrightarrow \begin{cases} sU - u(x,0) = kU_{xx} \\ U(0,s) = F(s) = L[f] \quad (RV)_L \end{cases} \Longrightarrow$

$$U_{xx} - \frac{s}{k}U = 0 \Longrightarrow U(x,s) = A(s)e^{\sqrt{\frac{s}{k}}x} + B(s)e^{-\sqrt{\frac{s}{k}}x}.$$

U begränsad då $\mathrm{Re}(s) \to \infty \Longrightarrow A(s) = 0 \Longrightarrow U(x,s) = B(s)e^{-\sqrt{\frac{s}{k}x}}$.

$U(0,s) = B(s) \overset{(RV)_L}{\Longrightarrow} B(s) = F(s) \Longrightarrow U(s,x) = F(s)e^{-\sqrt{\frac{s}{k}}x}$

Betrakta nu $(**)$:

$e^{-a\sqrt{s}} \overset{L}{\subset} \frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-a^2/4t} \quad \{$sätt $a = \frac{x}{\sqrt{k}}\} \Longrightarrow e^{-\sqrt{\frac{s}{k}}x} \overset{L}{\subset} \frac{x}{2\sqrt{\pi k t^3}}\, e^{-\frac{x^2}{4kt}} := g(t)$.

Varför

$$u(x,t) = (f*g)(t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi k}} \int_0^t f(t-\tau)\tau^{-3/2}e^{-\frac{x^2}{4k\tau}}d\tau.$$

∎

Spec. om $f(t) \equiv 1$. Sätt $\sigma = \frac{x}{\sqrt{4k\tau}}$; då $\tau = \frac{x^2}{4k}\sigma^{-2}$, $d\tau = -\frac{x^2}{2k}\sigma^{-3}d\sigma$ och

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{x}{2\sqrt{\pi k}} \int_\infty^{\frac{x}{\sqrt{4kt}}} \left(\frac{x^2}{4k}\right)^{-3/2} (\sigma^{-2})^{-3/2} e^{-\sigma^2} \left(\frac{-x^2}{2k}\sigma^{-3}\right) d\sigma \\ &= \frac{x}{\sqrt{\pi k}} \left(\frac{x^2}{4k}\right)^{-1/2} \int_{\frac{x}{\sqrt{4kt}}}^\infty e^{-\sigma^2}d\sigma = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{\sqrt{4kt}}}^\infty e^{-\sigma^2}d\sigma \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} erfc \frac{x}{\sqrt{4kt}} = erfc\frac{x}{\sqrt{4kt}}. \end{aligned}$$

∎

OBS!

$$erf(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-s^2}ds, \qquad erfc(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^\infty e^{-s^2}ds.$$