Variabelseparationen

Gör linjära (PDE) till (lösbara?) ODE.

Exempel 1. 1-Dimensionell värmeledningsekvation (parabolisk ekvation):

$$\begin{array}{ll} (PDE) \\ (RV) \\ (BV) \end{array} \left\{ \begin{array}{lll} u_t = k u_{xx} & x \in [0, L], \quad t \geq 0 & \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & 2 \text{ st} & \text{3 derivator är inblandade i PDE. Krävs} \\ u(x,0) = f(x) & 1 \text{ st} & \text{3 villkor: här 2 rand- och 1 initialdata.} \end{array} \right.$$

Lösning: Sätt $u(x,t) = X(t)T(t) \neq 0$ (obs! $u \equiv 0$ går ej om $f \neq 0$).

Anm. För $f \equiv 0$ är $u(x,t) \equiv 0$ en lösning. Vi söker lösningar som är skilda från noll och svarar mot $f \neq 0$. Insättning av $u(x,t) = X(t)T(t) \neq 0$ i (PDE) $\Longrightarrow$

$X(t)T'(t) = kX''(x)T(t)$. Dividera med $kX(x)T(t) \neq 0$ fås

$$\text{(beror av } t) \qquad \frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad \text{(beror av } x) \qquad := \lambda = \text{konstant.}$$

Ekvation för T: $\dfrac{T'(t)}{kT(t)} = \lambda \overset{\int dt}{\Longrightarrow} T(t) = C_0 e^{k\lambda t}, \quad \text{med} \quad C_0 = T(0).$

Ekvation för X: $\begin{array}{l} \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \Rightarrow \\ (RV) \Longrightarrow \end{array} \left\{ \begin{array}{l} X''(x) = \lambda X(x) \\ X(0) = X(L) = 0 \end{array} \right. \left| \begin{array}{ll} \text{kar. ekv.} & r^2 = \lambda \Rightarrow \\ \lambda > 0: & r = \pm\sqrt{\lambda} \\ \lambda < 0: & r = \pm i\sqrt{-\lambda} \end{array} \right.$

$$\text{a) } \lambda = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} X''(x) = 0 \Rightarrow X(x) = Ax + B \\ X(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \Longrightarrow X(x) = Ax \\ X(L) = 0 \Longrightarrow AL = 0 \overset{L \neq 0}{\Longrightarrow} A = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow X(x) \equiv 0 \Longrightarrow u(x,t) \equiv 0 \text{ motsägelse.}$$

b) $\lambda > 0 \Rightarrow X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$

$$X(0) = 0 \Longrightarrow A + B = 0 \Rightarrow B = -A$$

$$X(L) = 0 \Longrightarrow A(e^{\sqrt{\lambda}L} - e^{-\sqrt{\lambda}L}) = 0 \quad \underset{\lambda \neq 0}{\overset{L \neq 0}{\Longrightarrow}} \quad A = 0 \Longrightarrow B = 0.$$

$$\Rightarrow X(x) \equiv 0 \Longrightarrow u(x,t) \equiv 0, \qquad \text{motsägelse.}$$

c) $\lambda < 0 \Rightarrow X(x) = A\cos\sqrt{-\lambda}x + B\sin\sqrt{-\lambda}x$

$$X(0) = 0 \Longrightarrow A = 0$$

$$X(L) = 0 \Longrightarrow B\sin\sqrt{-\lambda}L = 0 \overset{B \neq 0}{\Longrightarrow} \sqrt{-\lambda}L = n\pi, \quad n \geq 1.$$

Alltså är för varje $n = 1, 2, \ldots$, $\lambda_n = -\left(\dfrac{n\pi}{L}\right)^2$ och $X_n(x) = B_n \sin\left(\dfrac{n\pi}{L}x\right)$.

Antag först att $C_0 = B_n = 1$ då är $u_n(x,t) = e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ en lösning till vår (PDE). Därför p.g.a. linjäritet superpositionen

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}kt} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \text{är lösningen av PDEn.}$$

Det återstår att beståmma C_n. För att bestämma C_n Använder man (BV):

$$u(x,0) = f(x) \Longrightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{1}$$

C_n kallas för Fourier sinus koefficienter för f i intervallet $[0, L]$.

Multiplicera (1) med $\sin(\frac{m\pi}{L}x)$, integerera över $[0, L]$, och byt $\int_0^L \ldots$ & $\sum_{n=1}^{\infty}$:

$$\underbrace{\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx}_{:=\langle f, X_m\rangle} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \underline{\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx}$$

$$\underbrace{\int_0^L \sin\frac{n\pi}{L}x \sin\frac{m\pi}{L}x\; dx}_{:=\langle X_n, X_m\rangle} = \frac{1}{2}\int_0^L [\cos(n-m)\frac{\pi}{L}x - \cos(n+m)\frac{\pi}{L}x]dx$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{om} \quad n \neq m \\ \frac{1}{2}\int_0^L [1 - \cos\frac{2m\pi x}{L}]dx = \frac{L}{2}, & \text{om} \quad n = m. \end{cases}$$

Det innebär att $\left\{\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\right\}_{m=1}^{\infty}$ är en ortogonalmängd (ortogonalbas). Vidare, genom att byta m mot n, får vi

$$\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = C_n \cdot \frac{L}{2} \Longrightarrow C_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx.$$

Här måste man ha ett *hum* om $f(x)$.

Anm: *Skalär produkt.* Vi har fått ovan

$$\langle f, X_m\rangle = C_m \langle X_m, X_m\rangle \Rightarrow C_m = \frac{\langle f, X_m\rangle}{\langle X_m, X_m\rangle} = \frac{\langle f, X_m\rangle}{|X_m|^2},$$

varför enligt (1) $f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, X_n\rangle}{\langle X_n, X_n\rangle} X_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

f_n: projektionen av f på $X_n \Longrightarrow f = (f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots)$ i basen $\{X_n\}_1^{\infty} = \left\{\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Jämför med *finit element* från första delen av kursen!

Exemple 2. Nu betraktar vi samma värmeledningsproblem fast med Neumann data:

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} & (PDE) \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 & (RV) \\ u(x,0) = f(x) & (BV). \end{cases}$$

Lösning: Sätt $u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0 \quad \overset{(PDE)}{\underset{(RV)}{\Longrightarrow}} \quad \begin{cases} \frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda = \text{konstant} \\ \\ X'(0) = X'(L) = 0. \end{cases}$

Vi kan kolla att denna gången endast $\lambda \leqq 0$ ger icke-trivial ($\neq 0$) lösning. Här

$\underline{\lambda = 0}$, med $X'(0) = X'(L) = 0$; svarar mot $X(x) = \text{konstant}$.

$\underline{\lambda < 0}$: $X(x) = A\cos(\sqrt{-\lambda}x) + B\sin\sqrt{-\lambda}x) \Longrightarrow$

$$X'(x) = -A\sqrt{-\lambda}\sin(\sqrt{-\lambda}x) + B\sqrt{-\lambda}\cos(\sqrt{-\lambda}x)$$

$$X'(0) = 0 \Longrightarrow B = 0; \quad X'(L) = 0 \Rightarrow A\sqrt{-\lambda}\sin(\sqrt{-\lambda}L) = 0.$$

$$\{A \neq 0, \quad \lambda \neq 0\} \Longrightarrow \sin(\sqrt{-\lambda}L) = 0.$$

Alltså $\begin{cases} \lambda = -(\frac{n\pi}{L})^2; & n = \; 0, 1, 2, \ldots \\ & \qquad\uparrow \\ & \text{Svarar mot konstant lösning för } (\lambda = 0) \\ X_n(x) = A_n \cos(\frac{n\pi}{L}x). \end{cases}$

Välj först $A_n = C_0 = 1$. Vi få en lösning: $\underline{u_n(x,t) = e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt}\cos\frac{n\pi}{L}x, \quad n \geq 0.}$

Superposition ger

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}kt}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right); \text{ med } C_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx, n \geq 0.$$

Exempel 3. Antag nu värmeledningsekvation i en cirkulär ring:

$u_t = ku_{\theta\theta}$; $\theta :=$ centrala vinkeln. (Här kan vi anta en 2π-periodicitet i θ-led).

Då gäller, med variabelseparation, generalt för $\begin{cases} u(t),\theta) = T(t)\Theta(\theta) \\ u(0,\theta) = f(\theta) \\ u(t,0) = u(t,2\pi) \end{cases}$ att

$$T(t) = C_0 e^{\lambda kt}; \qquad \Theta(\theta) = A\cos(\sqrt{-\lambda}\theta) + B\sin(\sqrt{-\lambda}\theta).$$

Nu har vi inga naturliga randvillkor, däremot periodicitet antagande ger

$$\Theta(0) = \Theta(2\pi) \Longrightarrow A = A\cos(\sqrt{-\lambda}2\pi) + B\sin(\sqrt{-\lambda}2\pi).$$

Identifiering av koefficienter $\Rightarrow$ (B behöver inte vara $= 0$) $\Rightarrow \sqrt{-\lambda} =$ heltal $:= n$.

$\Rightarrow \lambda = -n^2, n = 0, 1, 2, \ldots$. Slutligen $u(t,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2kt}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$.

$$\Longrightarrow \qquad \underline{u(0,\theta) = f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta).}$$

Våg ekvationen:

$$\begin{array}{l} (PDE) \\ (RV) \\ (BV1) \\ (BV2) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad x \in (0,L), t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{array} \right.$$

p.s.s. $u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$

$\overset{(PDE)}{\Longrightarrow} T''(t)X(x) = c^2T(t)X(x)$

$\Rightarrow \frac{T''(t)}{c^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(som tidigare)}}}{<} 0$

Samma resonemang, som för värmenedningsproblem, ger denna gången

$T(t) = A\cos(\sqrt{-\lambda}ct) + B\sin(\sqrt{-\lambda}ct); \qquad X(x) = C\cos(\sqrt{-\lambda}x) + D\sin(\sqrt{-\lambda}x)$

$X(0) = 0 \Longrightarrow C = 0 \Longrightarrow X(x) = D\sin(\sqrt{-\lambda}x)$

$X(L) = 0 \Longrightarrow D\sin(\sqrt{-\lambda}L) = 0 \overset{D\neq 0}{\Longrightarrow} \lambda = -(\frac{n\pi}{L})^2; \quad n = 1, 2, \ldots$

Så vi har att

$$u_n(x,t) = \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}ct\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}ct\right)\right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Superposition $\Longrightarrow$

$$u(x,t) \overset{(*)}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi ct}{L} + b_n \sin\frac{n\pi ct}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

$$u(x,0) = f(x) \overset{(*)}{\Rightarrow} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi}{L}x; \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx,$$

$$u_t(x,0) = g(x) \overset{(*)}{\Rightarrow} g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x; \qquad \text{med}$$

$$\frac{n\pi c}{L} b_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \Longrightarrow b_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx.$$

d' Alemberts formel: Man kan visa att lösningen till våg ekvationen ges av

$$u(x,t) \quad = \tfrac{1}{2}[f(x+ct)+f(x-ct)] + \tfrac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)dy. \quad (**)$$

$\uparrow$

(Här kan man "se!" lösningen. Se Folland exercise 1.1. 6.)

Bevis. Vi visar här att lösningen $(*)$ till våg ekvationen ger $(**)$:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{L}\left(a_n \cos\frac{n\pi ct}{L} + b_n \sin\frac{n\pi ct}{L}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi ct}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n\pi ct}{L} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right)\right] \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{2}(x+ct)\right)\right] \\
&= \left\{ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi}{L}x \quad \& \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x \right\} \\
&= \frac{1}{2}[f(x+ct)+f(x-ct)] + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi}{L}\int_{x-ct}^{x+ct} \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right)dy \\
&= \frac{1}{2}[f(x+ct)+f(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)dy.
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Remark: (i) Diffusion (like heat equation) smooths out any irregularities in initial condition, whereas wave motion propagates singulariteis.

(ii) Diffusion process is irreversible in the sense that
Hot water + cold water $\underset{\nLeftarrow}{\Rightarrow}$ Warm water.