5. Samplingsteoremet

En version av samplingsteoremet finns bevisad i Folland, sid. 230. Här ges ett annat bevis som utnyttjar δ-funktioner och Fourierserieutveckling av ett impulståg.

Om en tidskontinuerlig funktion $f(t)$ samplas (känns av) vid tidpunkterna $t = nT$ erhålls en tidsdiskret signal $\{f(nT)\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Denna kan representeras på tidskontinuerlig form som det viktade impulståget $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\delta(t-nT)$. Vi har (om $f(t)$ är kontinuerlig)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-nT) = f(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) = f(t)s_T(t).$$

Bandbegränsade signaler kan rekonstrueras ur sina sampelvärden som följande sats visar.

Sats 5.1. **(Samplingsteoremet)** *Antag att $f(t)$ är kontinuerlig med Fouriertransform $\hat{f}(\omega) = 0$ för $|\omega| \geq \alpha$ (bandbegränsad signal). Om signalen samplas med frekvensen $\frac{1}{T} \geq \frac{\alpha}{\pi}$ (vinkelfrekvens $\Omega = \frac{2\pi}{T} \geq 2\alpha$), så kan $f(t)$ återvinnas ur den samplade signalen genom en lågpassfiltrering med avhuggningsvinkelfrekvens α (LP_α-filtrering) och multiplikation med T.*

Bevis. Impulståget $s_T(t)$ har Fourierserieutvecklingen

$$s_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\Omega t}, \quad \text{där} \quad c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_T(t)e^{-in\Omega t}dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t)e^{-in\Omega t}dt = \frac{1}{T}.$$

Den samplade signalen är $f(t)s_T(t)$, och genom Fouriertransformering erhålles

$$f(t)s_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T}e^{in\Omega t}f(t) \supset \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega - n\Omega).$$

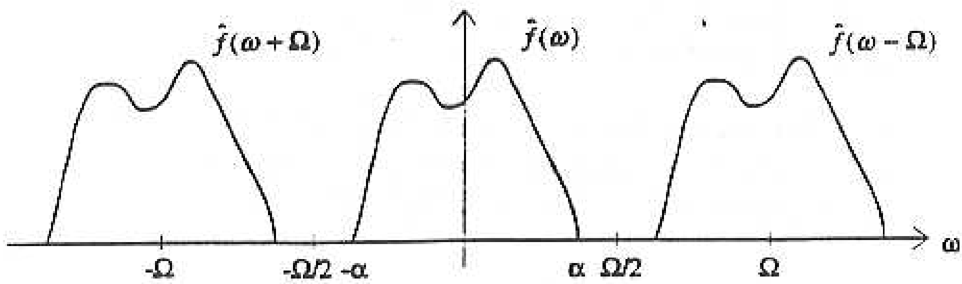
LP$_\alpha$-filtrering innebär på transformsidan multiplikation med

$$\hat{h}_\alpha(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{då } |\omega| \leq \alpha, \\ 0, & \text{då } |\omega| > \alpha. \end{cases}$$

Efter sampling, LP$_\alpha$-filtrering och multiplikation med T fås

$$T\mathrm{LP}_\alpha(f(t)s_T(t)) \supset \hat{h}_\alpha(\omega)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega - n\Omega).$$

Av termerna i summan är det bara den för $n = 0$ som är $\neq 0$ i frekvensbandet $|\omega| \leq \alpha$ (se fig.).



Därför är

$$\hat{h}_\alpha(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega - n\Omega) = \hat{f}(\omega),$$

och

$$TLP_\alpha(f(t)s_T(t)) = f(t).$$

□

Övningsexempel.

1) Antag samma förutsättningar som i samplingsteoremet. Visa att

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \frac{T \sin(\alpha(t - nT))}{\pi(t - nT)}.$$

2) Signalen $f(t)$ har Fouriertransformen $\hat{f}(\omega) = \theta(\omega + \alpha) - \theta(\omega - \alpha)$, där $\alpha > 0$ är en given gränsvinkelfrekvens. Signalen samplas med vinkelfrekvensen $\Omega > \alpha$, dvs. man bildar

$$f_s(T) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\delta(t - nT),$$

där $\Omega T = 2\pi$. Denna lågpassfiltreras sedan med avhuggningsvinkelfrekvens α (idealt lågpassfilter). Låt $g(t)$ vara resultatet av sampling och filtrering. Beräkna

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - g(t)|^2 dt.$$

Svar.

2. 0 om $\Omega \geq 2\alpha$; $\frac{1}{\pi}(2\alpha - \Omega)$ om $\alpha < \Omega < 2\alpha$.