TMA132 Fourieranalys F2/Kf2, 5 poäng, LÖSNIGAR

OBS! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Bevisa med hjälp av rekurrenta formler att

   a) $\int_0^x J_0(s)J_1(s)ds = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}J_0(x)^2$
   Lösning: Man har från (5.13)
   $J_1 = J_0'$, så $\int_0^x J_0(s)J_1(s)ds = -\int_0^x J_0(s)J_0'(s)ds = -\frac{1}{2}\int_0^x (J_0(s)^2)'ds = -\frac{1}{2}(J_0(s)^2)_0^x$

   b) $\int_0^x J_1(s)J_2(s)ds = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}J_0(x)^2 - J_1(x)^2$. Lösning: Derivera ekvationen som man vill bevisa. Man får $J_1J_2 = -J_0J_0' - 2J_1J_1'$. Ersätter $J_0' = -J_1$:
   $$J_1J_2 = J_0J_1 - 2J_1J_1',$$
   delar med J_1, får $J_2 = J_0 - 2J_1'$ – och det är (5.18), för $\nu = 1$. Så är derivator i vår formel lika ned varandra. I punkten $x = 0$ har vi 0 på vänster leden, och också 0 på höget sida eftersom $J_0(0) = 0, J_1(0) = 0$.

2. Hitta andragradpolynomen $P(x)$ som minimerar $\int_{-1}^1 |\sin x + 1 - P(x)|^2|x|dx$. Lösningen. Andragradpolynom P har formen $P(x) = ax^2 + bx + c$. För att använda approximationssatsen, måste man framställa polynom som kombination av ortogonala funktioner m.a.på skalärprodukten med vikt $w(x) = |x|$. Funktioner $f_0 = 1$ och $f_1 = x$ är redan ortogonala. Funktionen x^2 är ortogonal med f_1 men inte ortogonal med f_0. Så söker vi en kombination $f_2 = x^2 - kf_0$, så att $< f_2, f_0 >= 0$. Vi beräknar: $< x^2, f_0 >= \int_{-1}^1 x^2|x|dx = 1/2$, $< f_0, f_0 >= \int_{-1}^1 |x|dx = 1$, så har ekvationen $< x^2 - kf_0, f_0 >= 0$ lösningen $k =< x^2, f_0 > / < f_0, f_0 >= 1/2$, $f_2 = x^2 - 1/2$

   Nu söker vi Fourierkoefficienter för funktionen $F(x) = \sin(x)$ med avseende på ortogonala systemet f_0, f_1, f_2. Så har vi $< F, f_0 >= \int_{-1}^1 (\sin x + 1)|x|dx = 1$, $< F, f_1 >= \int_{-1}^1 (\sin x + 1)x|x|dx = 2 + 2\sin 1 - 4\cos 1$, $< F, f_2 >= \int_{-1}^1 (\sin x + 1)(x^2 - 1/2)|x|dx = 0$. Bästa approximationen ges av polynomen $\sum < F, f_j > \frac{f_j}{||f_j||^2}$ som är lika med

   $x/||x||^2(2 + 2\sin 1 - 4\cos 1) + 1/||1||^2$. Till slut beräknar vi normer, $||x||^2 = \int_{-1}^1 x^2|x|dx = 1/2$, $||1||^2 = 1$. Svaret: $P(x) = 2(2 + 2\sin 1 - 4\cos 1)x + 1$.

3. Hitta harmoniska funktionen $u(x, y)$ i övre halvplanet som satisfierar randvillkoren $u(x, 0) = 1, 0 < x < 4$, $u(x, 0) = 0, x > 4$ $u_y(x, 0) = 0, x < 0$.

   Lösningen: Vi gör konforma avbildningen av vårt problem till problemet i en kvadrant vilket vi vet hur att lösa. Vi betecknar, som vanligt, $z = x + iy$ och gör konforma avbildningen $w = \xi + i\eta = F(z) = z^{\frac{1}{2}}$. Övre halvplanet avbildas vid den avbildningen till den första kvadranten, halvaxeln $x > 0$ avbildas till reella halvaxeln $\xi > 0$, halvaxeln $x < 0$ avbildas till den imaginära halvaxeln $\eta > 0$. I nytt område, för den nya funktionen $v(w) = v(\xi, \eta)$ har vi ekvationen $\Delta v = 0$ i kvadranten $\xi = 0, \eta = 0$, med gränsvillkoren $v(\xi, 0) = 1, 0 < \xi < 2$, $v(\xi, 0) = 0, \xi > 2$, $v_\xi(0, \eta) = 0, \eta > 0$. För att lösa det sista problemet, fortsätter vi funktionen v som en jämn funktion till hela övre halvplanet (som i problem 4.4.4

i Fishers bok). Den utvigdade funktion ska satisfiera Laplaceekvationen i halvplanet $\eta > 0$, med gränsvillkoret $v(\xi, 0) = 1, -1 < \xi < 1$, $v(\xi, 0) = 0$ utanför $(-1, 1)$. Funktionen v hittar med hjälp av Poissonformeln

$$v(\xi,\eta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} v(t,0)\frac{\eta}{(\xi-t)^2+\eta^2}dt = \int_{-1}^{1}\frac{\eta}{(\xi-t)^2+\eta^2}dt.$$

Den sista integralen beräknar vi med hjälp av variabelbyte $\tau = \eta^{-1}(t-\xi)$, $dt = \eta d\tau$,

$$v(\xi,\eta) = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{-1-\xi}{\eta}}^{\frac{(1-\xi)}{\eta}} \frac{1}{\tau^2+1}d\tau = \frac{1}{\pi}(\arctan(\frac{1-\xi}{\eta}) - \arctan(\frac{-1-\xi}{\eta})).$$

Funktionen $u(z) = u(x, y)$ hittar vi med regeln $u(z) = v(F(z))$. För att göra det, hittar man ξ, η från ekvationen $(x + iy)^{1/2} = (\xi + i\eta)$, eller $(x + iy) = (\xi + i\eta)^2 = \xi^2 - \eta^2 + 2i\xi\eta$. Vi löser systemet $\xi^2 - \eta^2 = x$, $2\xi\eta = y$, och vi är intresserade av lösningar för vilka $\xi, \eta \geq 0$. Lösningen av systemet ger: $\xi = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}}$, $\eta = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}$. Vi sätter det i uttrycket för u:

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\left[\arctan\left(\frac{1-\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}}}{\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}}\right) - \arctan\left(\frac{-1-\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}}}{\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}}\right)\right].$$

4. Funktionen $f(\theta)$ är 2π-periodisk, och $f(\theta) = \cos\theta$, $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ och $f(\theta) = 0$ för $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ och $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$. Utveckla f i komplex Fourierserie. Bestäm sedan en 2π-periodisk lösning till ekvationen

$$y'' + 3y = f.$$

Lösning:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos x e^{-inx}dx \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}(e^{ix}+e^{-ix})e^{-inx}dx \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}(e^{i(1-n)x}+e^{(-1-n)ix})dx \\ &= \frac{1}{4\pi}(I_{n-1}+I_{n+1}), I_k = \int_{\pi/2}^{3\pi/2}e^{-ikx}dx. \end{aligned}$$

Vi beräcknar I_k separat. Vi har $I_0 = \pi$. För $k \neq 0$,

$$I_k = (-ik)^{-1}(e^{-ikx})_{\pi/2}^{3\pi/2} = \frac{i}{k}(e^{-3k\pi/2} - e^{-k\pi}).$$

För jämna k har vi $I_k = 0$. För udda $k = 2l + 1$,

$$I_{2l+1} = \frac{i}{2l+1}(e^{-i(3\pi l+3\pi/2)} - e^{-i(\pi l+\pi/2)}) = \frac{2}{2l+1}(-1)^l.$$

Vi kommer till uttryck för c_n. För n udda $n \neq 1, n \neq -1$, är både $n-1$ och $n+1$ jämna och icke-noll, så blir $C_n = 0$. För $n = 1, -1$ har vi $c_1 = c_{-1} = \frac{1}{4\pi} I_0 = 1$.

För n jämna, $n = 2l$,

$$c_{2l} = \frac{1}{4\pi}(I_{2l+1} + I_{2(l-1)+1}) = \frac{1}{4\pi}(\frac{2}{2l+1}(-1)^l + \frac{2}{2l-1}(-1)^{l-1}) \quad (1)$$

$$= -\frac{1}{2\pi}(-1)^l(\frac{1}{2l-1} - \frac{1}{2l+1}) = -\frac{1}{\pi}\frac{(-1)^l}{4l^2-1} \quad (2)$$

för att lösa ekvationen, söker vi $y(x)$ som en Fourierserie, $y(x) = \sum y_n e^{inx}$ och sätter in i differentialekvationen. Vi kommer till en serie av ekvationer för y_k:

$$-n^2 y_n + 3y_n = c_n,$$

eller

$$y_n = \frac{c_n}{3-n^2}.$$

5. Funktionen $f(\xi)$ definieras som $f(\xi) = \int_{-1}^{1}(1-|x|)^{2/3}e^{-ix\xi}dx$. Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty}\xi^2 f(\xi)^2 d\xi$.

Lösning: Betecknar $h(x) = (1-|x|)^{2/3}, |x| < 1$, $h(x) = 0, |x| \geq 1$. Då har vi $f = \hat{h}$. Eftersom funktionen h är jämn, så $\int h(x)\sin(x\xi)dx = 0$ och därför är $f(\xi)$ reellt, $f(\xi) = |f(\xi)|$. Enligt derivataregeln, $i\xi f(\xi) = \hat{h'}(\xi)$. Sätter in i integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\xi^2 f(\xi)^2 d\xi = ||\xi f(\xi)||^2 = ||i\xi f(\xi)||^2 = ||\hat{h'}(\xi)||^2 = (Parceval) = 2\pi||h'(x)||^2.$$

Den sista normen beräknar vi direkt. $h'(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}}, x < 0$, $h'(x) = -\frac{2}{3}(1-x)^{-\frac{1}{3}}, x > 0$, därför $\int |h'(x)|^2 = \frac{4}{3}$. Svar: $\frac{8\pi}{3}$

6. Lös problemet

$$\begin{cases} u_{xx} = 2u_t + u, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0,t) = 0, u(1,t) = 1 & u(x,0) = x \end{cases}$$

Lösning:

Först behöver man ett förberedelsesteg, eftersom vi har ett ohomogent gränsvillkor, $u(1,t) = 1$. Så söker vi en enkel funktion u_0 som satisfierar gransvillkoren $u_0(0,t) = 0, u_0(1,t) = 1$. Man kan ta en linjär funktion $u_0(x,t) = x$ och söka lösningen i formen $u(x,t) = u_0(x,t) + v(x,t)$. Sätter det in i ekvationen och gränsvillkoren och kommer till

$$\begin{cases} v_{xx} = 2v_t + v + x, & 0 < x < 1, t > 0 \\ v(0,t) = 0, v(1,t) = 1 & v(x,0) = 0 \end{cases}$$

Söker elementära lösningar i formen

$$v(x,t) = X(x)T(t)$$

, sätter in i homogena ekvationen:

$$X''T = 2XT' + XT.$$

Delar variabler, $\frac{X''}{X} - 1 = 2\frac{T'}{T} = -\lambda$. För X får Sturm-Liouville problem $X'' - X = -\lambda X, X(0) = X(1) = 0$. Allmäna lösningen har formen $X(x) = A\sin(\sqrt{\lambda - 1}x) + B\cos(\sqrt{\lambda - 1}x)$. Sätter in i gränsvillkoren, får $B = 0$, $\sin(\sqrt{\lambda - 1}) = 0, \sqrt{\lambda - 1} = \pi n$, $\lambda = \lambda_n = \pi^2 n^2 + 1, X = X_n = \sin \pi n x, n = 1, 2, ...$ Nu söker vi lösningen till partiella diffekvationen i formen av serie

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \pi n x.$$

Sätter in i ekvationen:

$$\sum(-(\pi n)^2)T_n(t) \sin \pi n x = 2\sum T_n'(t) \sin \pi n x + \sum T_n(t) \sin \pi n x + x.$$

Multiplicera den sista ekvationen med $\sin(\pi k x)$ och integrera. Endast termen med $n = k$ överlever, och vi får

$$\frac{1}{2}(-(\pi k)^2)T_k(t) = T_k'(t) + \frac{1}{2}T_k(t) + \int_0^1 x \sin(\pi k x)dx.$$

Den sista integralen är lika med $\frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Så för $T_k(t)$ kommer vi till ekvationen

$$T_k' = -\frac{1}{2}(\pi k)^2 + 1)T_k - \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Begynnelsevillkoret för T_k får vi från Begynnelsevillkoret för v, dvs $T_k(0)$. Vi löser ekvationen för T_k (det är en separabel ekkvation) och får

$$T_k(t) = \frac{2(-1)^{k+1}}{(\pi k)^2 + 1)k}(1 - e^{-(\frac{1}{2}(\pi k)^2 + 1))t}).$$

Svar:

$$u(x,t) = \sum \frac{2(-1)^{k+1}}{(\pi k)^2 + 1)k}(1 - e^{-(\frac{1}{2}(\pi k)^2 + 1))t}) \sin(k\pi x).$$

7. a) Huvudide av FFT
   b) Definition och exempel på reguljära och singuljära Sturm-Liouville problem

8. Definiera vad som menas med derivatan av en distribution. Motivera definitionen. Visa att $\theta' = \delta$ där θ är Heavisides stegfunktion.

Varje uppgift kan ge max. 8 p. Skrivningen beräknas färdigrättas fredagen, 12. mars.

GR