Ann-Brith Strömberg 2000–08–24

TMA135/MAN350 Optimering under osäkerhet Kompendium

Ett exempel från spannmålsodling

En bonde har 500 tunnland att odla vete, majs och sockerbetor på. Kostnaderna för utsäde, räknat i \$/tunnland, är 150, 230 och 260 för vete, majs respektive sockerbetor. Avkastningen för dessa grödor, vilken inte är helt känd i förväg, är stokastiska variabler och betecknas med $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ respektive $\mathbf{a}_3$ ton/tunnland. Bonden behöver för eget bruk 200 ton vete och 240 ton majs och inköpspriserna för dessa efter skörd är 238 respektive 210 \$/ton. Försäljningspriserna efter skörd är 170 och 150 \$/ton för vete respektive majs. Priset för sockerbetor är 36 \$/ton upp till maximalt 6000 ton och 10 \$/ton för det som därutöver säljs. Vi definierar variabler enligt:
x_j = antal tunnland som besås med gröda $j = 1, 2, 3$, där 1=vete, 2=majs, 3=sockerbetor;
y_j = antal ton som köps in av gröda $j = 1, 2$;
w_j = antal ton som säljs av gröda $j = 1, 2, 3, 4$, där 3(4)=sockerbetor, högt(lågt) pris, och formulerar sedan en optimeringsmodell för att maximera bondens vinst enligt

$$
\begin{array}{rllll}
z^* = \max & -150x_1 - 230x_2 - 260x_3 - 238y_1 - 210y_2 + 170w_1 + 150w_2 + 36w_3 + 10w_4, & & \\
\text{då} & x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 500, \\
& \mathbf{a}_1 x_1 \quad + y_1 \quad - w_1 & \geq & 200, \\
& \mathbf{a}_2 x_2 \quad + y_2 \quad - w_2 & \geq & 240, \\
& \mathbf{a}_3 x_3 \quad - w_3 - w_4 & \geq & 0, \\
& w_3 & \leq & 6000, \\
& x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, w_1, w_2, w_3, w_4 & \geq & 0.
\end{array}
$$

För att denna modell skall kunna leda till en optimal fördelning av arealen måste bonden före sådden veta hur stor avkastningen kommer att bli.

Antag att 3 olika scenarier kan inträffa, vart och ett med sannolikheten $\frac{1}{3}$. Scenarium 1 motsvaras av en avkastning som är 20% under väntevärdet, $a_{\cdot 1} = (2, 2.4, 16)$, scenarium 2 av förväntat värde, $a_{\cdot 2} = (2.5, 3, 20)$, och scenarium 3 av en avkastning som är 20% över väntevärdet, $a_{\cdot 3} = (3, 3.6, 24)$. Definiera nya variabler enligt:
y_{js} = antal ton av gröda j som köps in vid scenarium $s = 1, 2, 3$;
w_{js} = antal ton av gröda j som säljs vid scenarium $s = 1, 2, 3$.
Vi kan då formulera följande scenariemodell:

$$
\begin{array}{rllll}
\max & -150x_1 - 230x_2 - 260x_3 + \frac{1}{3} \sum_{s=1}^{3} \left(-238y_{1s} - 210y_{2s} + 170w_{1s} + 150w_{2s} + 36w_{3s} + 10w_{4s} \right), & & & \\
\text{då} & x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 500, & \\
& a_{1s}x_1 \quad + y_{1s} \quad - w_{1s} & \geq & 200, & s = 1, 2, 3, \\
& a_{2s}x_2 \quad + y_{2s} \quad - w_{2s} & \geq & 240, & s = 1, 2, 3, \\
& a_{3s}x_3 \quad - w_{3s} - w_{4s} & \geq & 0, & s = 1, 2, 3, \\
& w_{3s} & \leq & 6000, & s = 1, 2, 3, \\
& x_1, x_2, x_3, y_{1s}, y_{2s}, w_{1s}, w_{2s}, w_{3s}, w_{4s} & \geq & 0, & s = 1, 2, 3.
\end{array}
$$

Det optimala fördelningen av arealen blir $x^* = (170, 80, 250)$. Beroende på vilket scenarium som sedan inträffar kommer bonden att köpa in och sälja olika mängder enligt:

$$[y^*_{\cdot 1}, y^*_{\cdot 2}, y^*_{\cdot 3}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 48 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ och } [w^*_{\cdot 1}, w^*_{\cdot 2}, w^*_{\cdot 3}] = \begin{bmatrix} 140 & 225 & 310 \\ 0 & 0 & 48 \\ 4000 & 5000 & 6000 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vinsten blir vid de olika scenarierna $z_1^* = \$48,820$, $z_2^* = \$109,350$ samt $z_3^* = \$167,000$. Den genomsnittliga vinsten per år, under många år, blir med scenariemodellen $\$108,390$.

Tidningsbudsproblemet

Ett tidningsbud går varje morgon till tidningsutgivaren och köper x exemplar av dagens tidning till ett pris av c per styck. Det antal han köper har vanligtvis en övre gräns, u, som motsvarar antingen budets säljförmåga eller en gräns som utgivaren har satt för varje tidningsbud. Sedan går tidningsbudet ut och säljer så många tidningar som möjligt för försäljningspriset q, där $q > c$. Alla osålda tidningar kan säljas tillbaka till utgivaren för återköpspriset r, där $r < c$. Det antas att tidningsbudet inte kan återvända till utgivaren under dagen för att köpa fler tidningar, eftersom andra tidningsbud redan har köpt de återstående tidningarna. Han kan inte heller sälja dagens tidning imorgon, eftersom läsarna vill ha färska nyheter.

Hur många exemplar av tidningen skall budet köpa varje morgon? Efterfrågan på tidningar varierar mellan olika dagar och beskrivs av den stokastiska variabeln $\boldsymbol{\xi}$.

För att beskriva budets vinst definierar vi y som försäljningsvolymen och w som det antal tidningar som återköps av utgivaren på kvällen. Vi kan då formulera problemet som

$$\begin{array}{ll} \min & c \cdot x + \mathcal{Q}(x) \\ \text{då} & 0 \leq x \leq u \end{array}$$

där

$$\mathcal{Q}(x) = E_{\boldsymbol{\xi}} Q(x, \boldsymbol{\xi})$$

och

$$\begin{array}{rrcl} Q(x,\boldsymbol{\xi}) = \min & -q \cdot y(\boldsymbol{\xi}) - r \cdot w(\boldsymbol{\xi}) & & \\ \text{då} & y(\boldsymbol{\xi}) & \leq & \boldsymbol{\xi} \\ & y(\boldsymbol{\xi}) + w(\boldsymbol{\xi}) & \leq & x \\ & y(\boldsymbol{\xi}), w(\boldsymbol{\xi}) & \geq & 0 \end{array}$$

och $E_{\boldsymbol{\xi}}$ betecknar väntevärdet med avseende på $\boldsymbol{\xi}$. Här motsvarar $-\mathcal{Q}(x)$ den förväntade vinsten vid försäljning och återköp, medan $-Q(x, \boldsymbol{\xi})$ är vinsten vid försäljning och återköp då efterfrågan är på nivån $\boldsymbol{\xi}$.

Modellen illustrerar två-stegskaraktären hos tidningsbudets problem. Beslutet om hur många tidningar budet skall köpa måste fattas på morgonen, innan han vet dagens efterfrågan. När efterfrågan är känd, i det så kallade andra steget, i slutet av försäljningsperioden för det aktuella numret, kan vinsten beräknas enligt

$$
\begin{aligned}
y^*(\boldsymbol{\xi}) &= \min\{\boldsymbol{\xi}, x\}, \\
w^*(\boldsymbol{\xi}) &= \max\{x - \boldsymbol{\xi}, 0\}.
\end{aligned}
$$

Försäljningsvolymen kan aldrig överstiga antalet tillgängliga tidningar och ej heller efterfrågan. Återköp görs endast då efterfrågan är lägre än antalet tillgängliga tidningar. Väntevärdesfunktionen för steg två ges av

$$
\mathcal{Q}(x) = E_{\boldsymbol{\xi}}[-q \cdot \min(\boldsymbol{\xi}, x) - r \cdot \max(x - \boldsymbol{\xi}, 0)].
$$

Denna funktion är konvex och kontinuerlig dftersom $q > r$. Då $\boldsymbol{\xi}$ är en kontinuerlig stokastisk variabel är $\mathcal{Q}$ också differentierbar. I detta fall ges lösningen till tidningsbudsproblemet av

$$
x = \begin{cases} 0 & \text{om} \quad c + \mathcal{Q}'(0) > 0, \\ u & \text{om} \quad c + \mathcal{Q}'(u) < 0, \\ \text{lösningen till } c + \mathcal{Q}'(x) = 0 & \text{annars,} \end{cases}
$$

där $\mathcal{Q}'(x)$ betecknar första ordningens derivata av $\mathcal{Q}$ i punkten x.

Funktionsvärdet för $\mathcal{Q}$ i punkten x kan beräknas enligt

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Q}(x) &= \int_{-\infty}^{x} (-q\xi - r(x - \xi))\, dF(\xi) + \int_{x}^{\infty} (-qx)\, dF(\xi) \\
&= -(q - r) \int_{-\infty}^{x} \xi\, dF(\xi) - rxF(x) - qx(1 - F(x)),
\end{aligned}
$$

där $F(\boldsymbol{\xi})$ betecknar den kumulativa fördelningsfunktionen för $\boldsymbol{\xi}$. Med hjälp av partiell integration följer att

$$
\mathcal{Q}(x) = -qx + (q - r) \int_{-\infty}^{x} F(\xi)\, d\xi,
$$

så att

$$
\mathcal{Q}'(x) = -q + (q - r)F(x).
$$

Lösningen ges därför av

$$
x^* = \begin{cases} 0 & \text{om} \quad \frac{q-c}{q-r} < F(0), \\ u & \text{om} \quad \frac{q-c}{q-r} > F(u), \\ F^{-1}(\frac{q-c}{q-r}) & \text{annars,} \end{cases}
$$

där $F^{-1}(\alpha)$ är α-kvantilen för F. Om F är kontinuerlig så innebär $x = F^{-1}(\alpha)$ att $\alpha = F(x)$. En rimlig beskrivning av efterfrågan bör implicera $F(0) = 0$, vilket innebär att lösningen aldrig kan vara $x^* = 0$.

Tidningsbudsproblemet är ett exempel på ett stokastiskt optimeringsproblem med "simple recourse".

Inlämnings/laborationsuppgifter I

Följande övningar utgår alla från grundvarianten av odlingsexemplet respektive tidningsbudsproblemet. För varje uppgift skall du göra några förändringar i den ursprungliga matematiska modellen och lösa det nya stokastiska optimeringsproblemet antingen för hand eller med hjälp av lämplig programvara. Skriv en kort rapport om vad du kommit fram till.

1. [Värdet av den stokastiska lösningen (VSS)]

   Antag att bonden använder sin mark enligt den lösning som baseras på att avkastningen är den förväntade, d.v.s., 120 tunnland vete, 80 tunnland majs och 300 tunnland sockerbetor. Visa att om avkastningen är stokastisk (20% över, lika med och 20% under förväntat värde, med sannolikheten en tredjedel vardera) så blir den förväntade årliga vinsten $\$107,240$. Observera att kostnaden för sådd är känd i förväg men att den mängd gröda som säljs/köps in efter skörd beror av avkastningen, som är osäker. Gör en tabell över hur mycket av de olika grödorna som skördas, köps in och säljs under de tre olika scenarierna, då steg ett–lösningen $x = (120, 80, 300)$ enligt ovan används.

2. [Priseffekt]

   När avkastningen är god för en bonde så är den vanligtvis god för många andra bönder också. Tillgången ökar alltså, vilket medför sjunkande försäljningspriser för bönderna. Antag att priserna på majs och vete blir 10% lägre än ordinarie priser då avkastningen är 20% högre än förväntat och att de blir 10% högre då avkastningen är 20% lägre än förväntat. Formulera en modell där dessa prisförändringar påverkar både inköp och försäljning och majs och vete. Antag att priset på sockerbetor inte påverkas av avkastningen.

3. [Binärt första steg]

   Antag att bonden har fyra åkrar med arealerna 185, 145, 105 respektive 65 tunnland. Notera att totala arealen om 500 tunnland är oförändrad. Eftersom detta hände innan det laga skiftet ägde rum är dessa åkrar belägna i olika delar av byn. För att effektivisera sitt arbete vill bonden därför odla endast en typ av gröda på varje åker. Formulera denna modell som ett två–stegs stokastiskt optimeringsproblem där steg 1–problemet har binära variabler.

4. [Heltaligt steg två]

   Antag att försäljning och inköp av majs och vete endast kan utföras via kontrakt om hela multipler av hundra ton. Formulera modellen som ett stokastiskt optimeringsproblem där steg 2–problemet är ett blandat heltalsproblem.

5. [Numerisk lösning]

   För var och en av uppgifterna 2, 3 och 4: Använd någon standard-programvara för lösning av blandade linjära heltalsproblem och finn en lösning till optimeringsproblemet. Beräkna det förväntade värdet av perfekt information (EVPI) och värdet av den stokastiska lösningen (VSS).

6. [Flerstegsproblem]

   För att inte utarma jorden brukar man idka växelbruk, d.v.s., på en och samma åker odlar man olika grödor olika år. Sockerbetor, t.ex., bör odlas högst var tredje år, vilket innebär att man odlar sockerbetor på en viss åker endast ett av tre år. Formulera ett flerstegs–problem för att beskriva denna situation. För att hålla det hela någorlunda enkelt; antag att sockerbetor inte får odlas under två efterföljande år på samma fält, men att inga sådana regler finns för vete och majs.

   (Om sockerbetor får odlas högst vartannat år får problemet ingen ytterligare begränsning, eftersom lösningen 170 tunnland vete, 80 tunnland majs och 250 tunnland sockerbetor då är tillåten om man varje år byter åker för sockerbetsodlingen. För en treårs-rotation däremot, blir den lösningen inte tillåten. För fallet med åkrar av givna arealer som i uppgift 3 är även tvåårs-rotationen relevant.

   För tvåårs-rotationen är det i formuleringshänseende tillräckligt att göra en trestegs-modell. Steg ett består då av första årets sådd, steg två av första årets inköp och försäljning samt andra årets sådd, och steg tre av andra årets inköp och försäljning. Alternativt kan man formulera en fyrstegs-modell, där man skiljer första årets inköp och försäljning från andra årets sådd. Diskutera också hur man kan diskontera intäkter och kostnader mellan de olika stegen.)

7. [Riskobenägenhet]

   Enligt ekonomisk teori är en bonde vanligen, i likhet med de flesta andra, obenägen att ta risker. Det finns olika sätt att modellera riskobenägenhet. En simpelt sätt är att planera för det värsta som kan hända. Mer precist handlar det då om att maximera vinsten under förutsättning att det värsta möjliga scenariet inträffar. Notera att för vissa modeller kan man inte i förväg veta vilket scenarium som kommer att ge den lägsta vinsten. I odlingsexemplet motsvaras den sämsta tänkbara situationen av scenarium 3 (avkastningen 20% under förväntat värde). Att planera för det värsta som kan hända innebär då att lösningen 100 tunnland vete, 25 tunnland majs och 375 tunnland sockerbetor är optimal, med en årlig vinst om lägst $\$59,950$.

   (a) Beräkna minskningen av förväntad vinst om denna lösning väljs jämfört med då lösningen från den stokastiska modellen används.

   (b) Ett vettigt angreppssätt kan vara att kräva en minimivinst även om det värsta scenariot inträffar (man försäkrar sig mot en alltför liten vinst eller stor förlust). Finn en lösning som maximerar den förväntade vinsten under förutsättning att då det sämsta scenariot inträffar får det årets vinst inte understiga $\$58,000$. Hur mycket mindre blir den förväntade vinsten?

   (c) Upprepa uppgift 7b för andra nivåer på accepterad minimal vinst: $\$56,000$, $\$54,000$, $\$52,000$, $\$50,000$ respektive $\$48,000$. Gör en graf över förväntad minskning av vinsten. Jämför också motsvarande optimala beslut.

8. [Osäkra priser]

   Om priserna också är stokastiska variabler, så blir problemet mera komplicerat. För tidningsbudsproblemet gäller att om priserna är oberoende stokastiska variabler så är lösningen den samma som den man får då q och r ersätts av sina respektive förväntade värden. Visa detta! Under vilka förutsättningar gäller detta även för odlingsexemplet?

9. [Begränsade stokastiska variabler]

   I tidningsbudsproblemet har vi för enkelhets skull antagit att den stokastiska variabeln kan anta alla värden mellan $-\infty$ och ∞. Visa att de optimala besluten är oberoende av detta antagande, d.v.s. att om densitetsfunktionen för var och en av de stokastiska variablerna är strikt positiv endast på ett begränsat intervall så erhålls optimallösningen ändå av samma analytiska uttryck.

10. [Värdet av den stokastiska lösningen (VSS)]

    Antag för tidningsbudsproblemet att $c = 10$, $q = 25$, $r = 5$ och att efterfrågan är likformigt fördelad på intervallet $[50, 150]$. Finn optimallösningen till det modifierade problemet. Finn också lösningen till den deterministiska modell som erhålls då efterfrågan antas vara 100. Beräkna värdet av den stokastiska lösningen.

Inlämnings/modelleringsuppgifter II

Följande övningar ger upphov till stokastiska optimeringsproblem som kan lösas med standard linjär-, ickelinjär- eller heltalsoptimerings-programvara. För varje uppgift skall du formulera en matematisk modell, lösa det stokastiska optimeringsproblemet samt beräkna värdet av den stokastiska lösningen (VSS). Skriv en kort rapport om modellen, lösningen och resultaten.

1. [Sektionsindelning i flygplan]

   Flygbolaget Västkustflyg vill bestämma hur man skall dela upp platserna i ett nytt plan på sträckan Göteborg–Malmö. Planet har plats för 200 passagerare i ekonomiklass. En sektion kan avdelas för förstaklasspassagerare, men var och en av dessa stolar tar lika mycket utrymme som två stolar i ekonomiklass. Man kan också ha en sektion för affärsklass; var och en av dessa stolar tar lika mycket utrymme som en och en halv stol i ekonomiklass. Vinsten på en förstaklassbiljett är emellertid tre gånger så stor som vinsten på en ekonomiklassbiljett, och vinsten på en affärsklassbiljett är dubbelt så stor som den på en ekonomiklassbiljett. När stolarna i planet en gång har blivit indelade i sektioner för olika biljettklasser kan denna indelning inte ändras. Man vet emellertid att planet inte alltid kommer vara fullbokat i alla sektioner. Man antar att tre olika scenarier kommer att inträffa med ungefär lika hög frekvens: (1) vardagsmorgon och -kvällstrafik, (2) helgtrafik och (3) lunchtrafik på vardagar. Under scenarium 1 tror man att man kan sälja så mycket som 20 första-, 50 affärs- och 200 ekonomiklassbiljetter. Under scenarium 2 är motsvarande värden 10, 25 och 175, och under scenarium 3 är de 5, 10 och 150. Antag att man inte kan sälja fler biljetter av en viss klass än det finns stolar i motsvarande sektion.

   (I verkligheten kan man tillåta överbokning, men då beaktar man problemet att ta hänsyn till att en del passagerare med reservationer inte dyker upp (no-shows).)

2. [Produktionsplanering]

   Tomatbolaget (TB) tillverkar tomatpuré, ketchup och salsa med hjälp av fyra olika ingredienser: arbetskraft, tomater, socker och kryddor. För framställning av en låda tomatpuréburkar krävs 0.5 mantimmar, 1.0 korg tomater, inget socker och 0.25 burk kryddor. Motsvarande för att framställa en låda ketchupflaskor är 0.8 mantimmar, 0.5 korg tomater, 0.5 påsar socker och 1.0 burk kryddor, och för att framställa en låda salsaburkar krävs 1.0 mantimmar, 0.5 korg tomater, 1.0 påse socker och 3.0 burkar kryddor.

   Företaget skall planera produktionen för de tre följande perioderna. Man kan använda 200 mantimmar, 250 korgar tomater, 300 påsar socker och 100 burkar kryddor till ordinarie priser. Dock kan man betala extra för ytterligare resurser enligt: 2.0 per mantimma, 0.5 per tomatkorg, 1.0 per sockerpåse och 1.0 per kryddburk. De ordinarie produktionskostnaderna per låda av produkterna är 1.0 för tomatpuré, 1.5 för ketchup och 2.5 för salsa.

   Efterfrågan i varje period är inte känd med säkerhet förrän efter det att produkterna för den perioden är tillverkade. TB förutsäger att det i varje period finns två olika möjligheter, motsvarande en god och en dålig ekonomi; dessa inträffar med lika stor sannolikhet. I det goda fallet kan man sälja 200 lådor tomatpuré, 40 lådor ketchup och 20 lådor salsa. I det dåliga fallet reduceras dessa siffror till 100, 30 respektive 5. Överproduktion av en produkt i en period kan lagras till nästa period till en kostnad av 0.5, 0.25 och 0.2 per låda av tomatpuré, ketchup respektive salsa. TB räknar också med att kostnaderna (d.v.s., förlust av goodwill) som uppkommer då efterfrågan i någon av perioderna inte tillgodoses är 2.0, 3.0 och 6.0 per låda av tomatpuré, ketchup respektive salsa.

3. [Vattenreglering]

   Klarsjö–dammen kontrollerar vattennivån i Klarsjön, en välrenommerad rekreationsort i Drömland. Dammkommisionen vill bestämma hur mycket vatten som skall släppas ut under var och en av de närmaste fyra månaderna. Vattennivån i Klarsjön är för närvarande 150mm under högvattennivån. Dammen har kapacitet för en sänkning av vattennivån i sjön med 200mm per månad, men ytterligare nederbörd och avdustning påverkar också dammen. Vädret kring Klarsjön är mycket varierande. Man har indelat de fyra månaderna i två stycken tvåmånadersblock med liknande väderförhållanden. De två månaderna inom samma block har samma sannolikhetsfördelning för väder, och fördelningarna för de två olika blocken antas oberoende av varann. I var och en av månaderna i det första blocket antar man sannolikheten 1/2 för att den naturliga vattenhöjningen blir 100mm, och med sannolikheten 1/4 vardera är den naturliga sänkningen av nivån 50mm, respektive är den naturliga höjningen 250mm. Alla dessa värden motsvarar naturliga förändringar av vattennivån, utan dammutsläpp. I var och en av månaderna i det andra blocket antar man sannolikheten 1/2 för att den naturliga vattenhöjningen blir 150mm, och med sannolikheten 1/4 vardera är den naturliga höjningen av nivån 50mm, respektive 350mm. Om vattnet stiger för högt beräknas kostnaderna för skador till $\$10,000$ per mm över högvatteniivån. En för låg vattennivå innebär att man måste importera vatten till höga kostnader. Dessa kostnader är \$5000 per mm lägre vattenstånd än 250mm under högvattennivån. Man vill minimiera de totala förväntade kostnaderna. Man överväger att istället minimera sannolikheten för att bryta mot högsta och/eller lägsta tillåtna vattennivå. (Detta ger en speciell typ av "chance constraints".) Modellera båda målfunktionerna.

4. [Utveckling av energikällor]

   Energimyndigheten i ett medelstort land vill beräkna åtgången av resurser att användas för att tillgodose efterfrågan på energi under det kommande decenniet. För närvarande finns två olika resurser för att möta energibehovet. Dessa resurser kan emellertid bli uttömda. Resurs 1 kostar 5 per enhet av efterfrågan som tillgodoses; den totala tillgången är för närvarande 25 ackumulerade enheter. Resurs 2 kostar 10 per enhet av efterfrågan som tillgodose och den totala tillgången är för närvarande 10 enheter. En ytterligare resurs från utlandet finns alltid tillgänglig till en kostnad av 16.7 per enhet.

   Man överväger att göra vissa investeringar inom var och en av resurserna 1 och 2 för att upptäcka nya tillgångar och bygga upp kapital. Utfallet av investeringar i resurs 1 är dock inte helt kända; en investering i nya tillgångar av resurs 1 med 1 enhet tillgodoser med sannolikheten 1/2 endast 0.1 enheter av efterfrågan och med sannolikheten 1/2 tillgodoser den 1 enhet av efterfrågan. För resurs 2 är utfallet av investeringar väl utredda; varje enhet som investeras i resurs 2 ger en enhet av tillgodosedd efterfrågan. Den ackumulerade efterfrågan på energi i innevarande decennium beräknas vara 10 medan efterfrågan i kommande decennium är 25.

Myndigheten vill minimera de förväntade kostnaderna för att tillgodose efterfrågan på energi i innevarande och nästkommande decennium. Man antar att resultatet av investeringar i resurs 1 blir kända i slutet av innevarande decennium. Kostnaderna i nästa decennium diskoneras till 60% av dess framtida nuvärde (som inte kommer att ändras).

5. [Planering av skogsavverkning]

   Skogsbolaget skall besluta om hur man skall förvalta sitt skogsbestånd. Träden i beståndet är av varierande ålder, som indelas i klasserna 1 till 4. För närvarande är 8000 tunnland av klass 1, $10,000$ av klass 2, $20,000$ av klass 1 och $60,000$ av klass 4. Varje klass motsvarar ungefär 25 års tillväxt; klass 1 är den yngsta och klass 4 den äldsta skogen. Man vill bestämma hur man skall avverka skog under var och en av de fyra kommande 25-årsperioderna för att maximera den förväntade avkastningen av skogen. Man förutser också att företaget skall finnas kvar efter ett sekel, så man kräver att det finns $40,000$ tunnland av klass 4 vid slutet av planeringshorisonten.

   Varje timmerklass har olika avkastning. Klass 1 har ingen avkastning, klass 2 ger 250 kubikfot per tunnland, klass 3 ger 510 kubikfot per tunnland och klass 4 ger 700 kubikfot per tunnland. Om inga skogsbränder inträffar är antalet tunnland av klass i (för $i = 2, 3$) i en period lika med antalet tunnland av klass $i-1$ i föregående period minus avverkad areal av klass $i-1$ under föregående period. Klass 1 i period t består av total avverkad areal i föregående period, $t-1$ (man planterar alltså nya träd inom några få år efter varje avverkning), medan klass 4 inkluderar den areal som var i klass 4 under period $t-1$ plus areal av klass 3 i period $t-1$ minus avverkad areal av klass 3 i period $t-1$.

   Medan vädereffekter inte varierar mycket över 25-årsperioder kan förluster på grund av skogsbränder vara synnerligen varierande. Antag att under varje 25-årsperiod blir 15% av alla timmerbestånd förstörda med sannolikheten 1/3, och att sannolikheten är 2/3 att 5% av bestånden går förlorade. Antag att diskonteringsnivåerna överbryggas fullständigt av ökande värde på timret, så att all avverkning under 100-årsperioden har samma nuvärde. Vinsten är då proportionell mot den totala avkastningen av skogen.

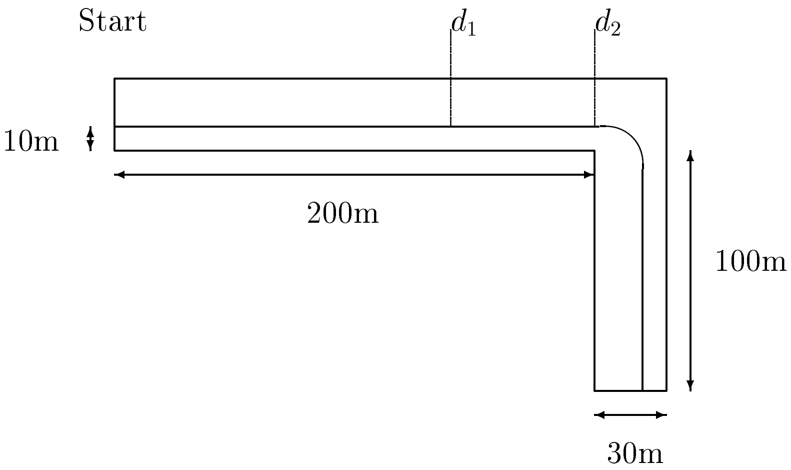
6. [Schemaläggning för sjuksköterskor]

   Vid akutintaget på ett sjukhus skall man planera bemanningen under en lördag, söndag och måndag. En sjuksköterska kan arbeta ordinarie tid vilka två av dagarna som helst till en kostnad av \$300 per dag. I regel kan en sköterska ta hand om 10 patienter under ett skift. Efterfrågan av vård är emellertid inte känd i förväg. Om det kommer in fler patienter än vad ordinarie sjuksköterskor kan ta hand om måste de arbeta övertid, till en kostnad av \$50 per ytterligare patient som måste tas om hand. Efterfrågan av sköterskor under lördagen är också en bra indikator för efterfrågan under påföljande söndag och måndag. Fler sköterskor kan kallas in för söndags- och måndagstjänstgöring efter det att lördagens efterfrågan har observerats. Kostnaden per dag är dock \$400 i detta fall. Sjukhuset vill minimera den förväntade kostnaden för att tillgodose efterfrågan av sjuksköterskor.

Antag att följande scenarier för de tre dagarnas efterfrågan alla inträffar med samma sannolikhet: $(100, 90, 20)$, $(100, 110, 120)$, $(100, 100, 110)$, $(90, 100, 110)$, $(90, 80, 110)$, $(90, 90, 100)$, $(80, 90, 100)$, $(80, 70, 100)$, $(80, 80, 90)$.

7. [Optimal kurvtagning]

Efter att ha erövrat den bästa startpositionen i Monza skall du försöka hitta det snabbaste sättet att ta dig igenom den första högersvängen, som börjar 200 meter från start och är 30 meter bred. Du har kommit ur kurvan vid 100 meter efter början av påföljande raksträcka (se figur 7).



Som i figuren vill du hålla dig 10 meter innanför barriären på startsträckan och accelerera så snabbt som möjligt fram till punkten d_1. Vid denna distans börjar du bromsa så hårt som möjligt och tar kurvan i den hastighet som du har då du når en punkt d_2. (Antag en cirkulär sväng med radie lika med kvadraten av hastigheten dividerad med maximal sidoacceleration.) Uppenbarligen vill du undvika att köra av banan.

Problemet är att du aldrig kan vara helt säker på bilen och banhastighet innan du börjar bromsa vid punkten d_1. Då vet du om banan är snabb, normal eller långsam, och då kan du också bestämma punkten d_2, där du kommer att gå in i kurvan. Du antar att de tre olika ban/bil-kombinationerna inträffar med sannolikheten $1/3$ vardera. Om banan är snabb, accelererar du med 27m/s^2, minskar hastigheten med 45m/s^2, och har en maximal sidoacceleration av 1.8g ($= 17.5\text{m/s}^2$). För en normal bana är dessa värden 24, 42 och 16; för en långsam är de 20, 35 och 14. Du vill minimera den förväntade tiden att passera denna sektion av banan. Du antar också att om du följer en optimal strategi kommer de övriga tävlande inte att tvinga dig av banan (men detta kan du inte vara helt säker på).

8. [Optimal längdhoppsstrategi]

Då du tränar inför olympisk tiokamp försöker du välja punkten för avstamp i längdhoppet för att maximera den förväntade längden på ditt officiella hopp. Olyckligtvis är det så att då du siktar på en viss punkt, är chansen 50/50 att du i stället gör avstamp 10cm bortom den punkten. Om du överskrider avstampslinjen diskvalificeras du och förlorar det hoppförsöket. Antag att du har tre hoppförsök och att det längsta hoppet räknas som ditt officiella resultat.

Du vill bestämma en strategi för vart och ett av de tre hoppen. Från början har du lika stor chans att göra ett 7.4- som ett 7.6-metershopp. Om det första hoppet är långt, så är sannolikheten för ytterligare ett 7.6-metershopp 2/3; den är 1/3 för ett 7.4-metershopp. Sannolikheterna är de omvända om du hoppade 7.4 meter vid första försöket. Det tredje hoppet har alltid samma sannolikheter som det andra.

Finn först en strategi för att maximera den förväntade längden av det officiella hoppet. Maximera sedan förväntat antal tiokampspoäng enligt tabellen nedan.

längd	poäng	längd	poäng	längd	poäng	längd	poäng
7.30	886	7.38	905	7.46	925	7.54	945
7.31	888	7.39	908	7.47	927	7.55	947
7.32	891	7.40	910	7.48	930	7.56	950
7.33	893	7.41	913	7.49	932	7.57	952
7.34	896	7.42	915	7.50	935	7.58	955
7.35	898	7.43	918	7.51	937	7.59	957
7.36	900	7.44	920	7.52	940	7.60	960
7.37	903	7.45	922	7.53	942	7.61	962

Exempel I

Linjära tvåstegsproblem med fix recourse

I följande uppgifter antas att ett två–stegs stokastiskt linjärt optimeringsproblem definieras som

$$\begin{aligned} \min\ z \quad &= \quad c^T x + \mathcal{Q}(x), \\ \text{då} \quad & \quad\ \ Ax = b, \\ & \quad\ \ x \geq 0, \end{aligned}$$

där $\mathcal{Q}(x) = E_{\boldsymbol{\xi}} Q(x, \xi(\omega))$ och $Q(x, \xi(\omega)) = \min_y \{q(\omega)^T y \mid Wy = h(\omega) - T(\omega)x,\ y \geq 0\}$. Vi definierar även mängderna $K_1 = \{x \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$, $K_2 = \{x \mid \mathcal{Q}(x) < +\infty\}$, $K_2(\xi) = \{x \mid Q(x, \xi) < +\infty\}$ samt $K_2^P = \{x \mid \forall \xi \in \Xi,\ \exists y \geq 0 : Wy = h - Tx\} = \cap_{\xi \in \Xi} K_2(\xi)$ (jfr. [BL] 3.1).

1. Studera följande steg två–problem.

$$\begin{aligned} \min\ 2y_1 + y_2&, \\ \text{då} \quad y_1 + 2y_2 \ &\geq \ \xi_1 - x_1, \\ y_1 + y_2 \ &\geq \ \xi_2 - x_1 - x_2, \\ y_1, y_2 \ &\leq \ 1, \\ y_1, y_2 \ &\geq \ 0. \end{aligned}$$

   (a) Finn $K_2(\xi)$ för alla ξ. (Tips: Använd begränsningarna uppåt på y_1 och y_2 för att begränsa vänsterledet.)

   (b) Låt $\boldsymbol{\xi}_1$ och $\boldsymbol{\xi}_2$ vara två oberoende kontinuerliga stokastiska variabler, båda likformigt fördelade på intervallet $[2, 4]$.

      i. Vad är K_2^P?

      ii. Vad är K_2?

2. Låt steg två av ett stokastiskt optimeringsproblem ges av

$$\begin{aligned} \min\ 2y_1 + y_2&, \\ \text{då} \quad y_1 - y_2 \ &\leq \ 2 - \boldsymbol{\xi} x_1, \\ y_2 \ &\leq \ x_2, \\ y_1, y_2 \ &\geq \ 0 \end{aligned}$$

   Finn $K_2(\boldsymbol{\xi})$ och K_2 då:

   (a) $\boldsymbol{\xi} \sim U[0, 1]$.

   (b) $\boldsymbol{\xi} \sim \texttt{Poisson}(\lambda)$, $\lambda > 0$ (d.v.s fördelningsfunktionen är $f(\xi) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{\xi}}{\xi!}$).

   Vilka egenskaper kan man förvänta sig att K_2 har?

3. Beakta följande steg två–problem:

$$Q(x, \xi) = \min\{y \mid y \geq \xi,\ y \geq x\}.$$

Antag för enkelhets skull att $x \geq 0$. Låt $\boldsymbol{\xi}$ ha fördelningsfunktionen

$$f(\xi) = \frac{2}{\xi^3}, \quad \xi \geq 1.$$

Visa att $K_2^P \neq K_2$. Jämför detta resultat med påståendet i [BL] 3.1, teorem 3, som säger att om $\boldsymbol{\xi}$ har ändliga andra-moment är $K_2 = K_2^P$!

4. Låt ett steg två-problem ges av

$$\begin{array}{lrcl} \min & 2y_1 + y_2, & & \\ \text{då} & y_1 + y_2 & \geq & 1 - x_1, \\ & y_1 & \geq & \boldsymbol{\xi} - x_1 - x_2, \\ & y_1, y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

(a) Visa att detta problem har "complete recourse" om $\boldsymbol{\xi}$ har ändligt väntevärde.

(b) Antag att $0 \leq x_1 \leq 1$ och $0 \leq x_2 \leq 1$. Visa att följande lösningar är optimala i steg två:
Om $\xi \geq x_1 + x_2 \Rightarrow y_1^* = \xi - x_1 - x_2$; $y_2^* = (1 - \xi + x_2)^+$ där $(a)^+ = \max(a; 0)$.
Om $\xi < x_1 + x_2 \Rightarrow y_1^* = 0$; $y_2^* = 1 - x_1$.
Det följer att

$$Q(x, \xi) = \begin{cases} 1 - x_1, & \text{då} \quad 0 \leq \xi \leq x_1 + x_2, \\ \xi + 1 - 2x_1 - x_2, & \text{då} \quad x_1 + x_2 \leq \xi \leq 1 + x_2, \\ 2(\xi - x_1 - x_2), & \text{då} \quad 1 + x_2 \leq \xi. \end{cases}$$

Kontrollera att $Q(x, \xi)$ är en styckvis linjär och konvex funktion av $(\mathbf{h}, \mathbf{T})$ och av x för alla $x \in K_1 \cap K_2$ (egenskaperna (a) och (c) i [BL] 3.1, teorem 5).

5. Låt ett steg två-problem ges av

$$\begin{array}{lrcl} \min & \xi y_1 + y_2, & & \\ \text{då} & y_1 + y_2 & \geq & 1 - x_1, \\ & y_1 & \geq & 1 - x_1 - x_2, \\ & y_1, y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Antag att $0 \leq x_1 \leq 1$ och $0 \leq x_2 \leq 1$. Bestäm ett uttryck för funktionen $Q(x, \xi)$ och visa att den är konkav av ξ.

6. Visa att tidningsbudsproblemet är ett specialfall av ett "simple recourse-problem".

Exempel II

Dynamiska system

1. Studera Exempel 2.3 på sidan 138 i [KW]. Antag att $T = 1$. Använd detta fiskeriexempel för att skriva ner alla funktioner som behövs i metoden för scenarieaggregering i figur 14 (s. 139 i [KW]).

2. Studera Exempel 2.3 på sidan 138 i [KW]. Antag att vi justerar modellen en aning så att vi tar hänsyn till att det finns både unga och gamla fiskar, och att karaktäristiken för fångst och fortplantning beror av åldersfördelningen inom beståndet. Vi får då ett två-dimensionellt tillståndsrum:

   - z_t^1: antal unga fiskar i period t;
   - z_t^2: antal gamla fiskar i period t.

   Först behöver vi veta karaktäristika för tillväxt och fortplantning hos beståndet. Då w är den genomsnittliga vikten hos vuxna fiskar ges dessa av

   $$\begin{aligned} z_{t+1}^1 &= 0.4z_t^1(1-0.5x_t) + swz_t^2\left(1-\frac{wz_t^2}{K}\right) \\ z_{t+1}^2 &= 0.8z_t^2(1-x_t) + 0.5z_t^1(1-0.5x_t) \end{aligned}$$

   Som i exemplet antar vi att z_0 är känd.

   (a) Ge en tolkning av de två överföringsfunktionerna ovan, inklusive beslutsvariabeln x_t.

   (b) Vad kan nu vara en naturlig målfunktion, enligt ditt sätt att se det?

   (c) Antag att s är stokastisk, och beskriv hur man kan använda scenarie-aggregering för att lösa denna nya version av Schaefer-modellen.