1

## Ordningar

Om vi tar ett vanligt optimeringsproblem

$$\min_{x \in X_0} f(x)$$

så kan vi byta ut $f(x)$ mot $h(f(x))$ där $h$ är en stigande funktion utan att påverka problemet. Detta beror på att målfunktionen $f$ ger information om ordningen av de tänkbara besluten, avståndet mellan besluten är irrelevant.

Hur gör vi om målfunktionen ej är ett tal, utan en stokastisk variabel.

2

## Exempel på ett stokastiskt problem

Portföljvalsproblemet, maximera avkastning på investerat kapital.

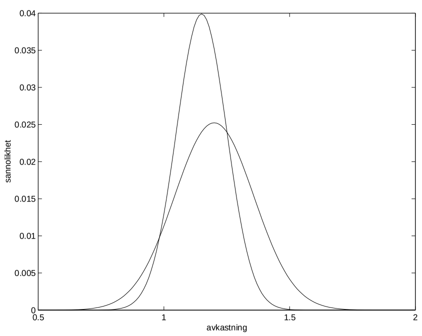
$$\begin{array}{rl} \max & \sum_{i=1}^{N} x_i \xi_i \\ \text{då} & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

$x_i$ Pengar satsat i tillgång $i$.

$\xi_i$ Utveckling för tillgång $i$, *stokastisk variabel.*

3

## Målfunktion stokastisk




4

## Hur jämföra stokastiska variabler

Vi behöver något sätt att rangordna olika stokastiska variabler.

Vi kan titta enbart på medelvärdet

Ett exempel:

Vi låter en person välja mellan att få 10 kr i handen, eller att singla slant. Om man gissar rätt får man 25 kr, gissar man fel får man inget. Vad väjer man?

5

## Hur jämför vi stokastiska variabler

Ett annat exempel:

Vi låter en person välja mellan att få 10Mkr i handen, eller att singla slant. Om man gissar rätt får man 25Mkr, gissar man fel får man inget. Vad väjer man?

Endast skalan skiljer detta exempel från det föregående.

6

## Hur jämför vi stokastiska variabler

Vi inför nyttofunktionen, $u$.

Nyttofunktionen ger oss för varje värde på målfunktionen hur vi värderar detta utfall, en nytta av beslutet.

Vi kan nu skriva vårt portföljvalsproblem

$$\begin{array}{rl} \max & \mathsf{E}_\xi[u(\sum_{i=1}^{N} x_i \xi_i)] \\ \text{då} & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \end{array}$$

Som exempel kan vi ta logaritmen. Om vi äger $x$ kronor är vi ungefär $\log(x)$ enheter lyckliga.

7

## Nyttofunktionen

Per definition är nyttofunktionen sådan att:

om en rationell person kan välja mellan två fördelningar av utfall, väljer hon fördelningen med störst förväntad nytta.

Nyttofunktionen är beroende av vem vi frågar.

8

## Nyttofunktionens egenskaper

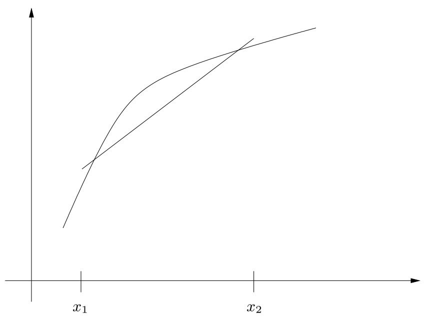
- Växande, $a < b \rightarrow u(a) < u(b)$
- Konkav, $u(\alpha a + (1-\alpha)b) \geq \alpha u(a) + (1-\alpha)u(b)$
- Avtagande marginalnytta, $\frac{d^2 u(a)}{da^2} <= 0$

Om $a$ och $b$ ej är tal.

- Inga cirkulära preferenser

9

## Nyttofunktionens egenskaper




10

## Några klassiska nyttofunktioner

- Identiteten $u(x) = x$. Motsvarar medelvärdet. En helt riskneutral människa.
- Lognytta $u(x) = log(x)$. Ger bäst avkastning vid upprepade spel med sannolikhet 1.
- $u(x) = \frac{x^c - 1}{c}, c \leq 1, c \neq 0$. Välj riskaversion själv (Power utility).
- $u(x) = -e^{-ax}, a > 0$ Exponentiell.
- $u(x) = x - bx^2$ Kvadratisk. Fungerar endast för $x < \frac{1}{2b}$.

11

## Ekvivalenta nyttofunktioner

Om vi har

$$u_1(x) = u_2(x) * c + a, c > 0$$

så får vi att

$$\max \mathsf{E}[u_1(X)] \Leftrightarrow \max \mathsf{E}[u_2(X)]$$

d.v.s nyttofunktionerna är ekvivalenta

12

## Arrow-Pratt

Arrow-Pratts absoluta riskaversionskoefficient är

$$a(x) = -\frac{u^{''}(x)}{u^{'}(x)}$$

och två nyttofunktioner som har samma $a(x)$ är ekvivalenta.

För väntevärdet får vi $a(x) = 0$, d.v.s vi bryr oss inte om risk. För exponentialfunktionen får vi

$$a(x) = -\frac{u^{''}(x)}{u^{'}(x)} = -\frac{-a^2 e^{-ax}}{ae^{-ax}} = a$$

d.v.s graden av riskaversion är oberoende av $x$.

13

## Relativ Arrow-Pratt

För $\log(x)$

$$a(x) = -\frac{u^{''}(x)}{u^{'}(x)} = -\frac{-1/x^2}{1/x} = \frac{1}{x}$$

Vår riskaverion avtar med $x$.

Däremot har vi att

$$xa(x) = \text{konstant}$$

d.v.s vår riskaversion är konstant i relativa termer.

14

## Grundplåt

Vad händer om vi lägger till en konstant, svarande mot att vi har antra tillgångar än utkomsten av spelet?

Vi låter Bill Gates välja mellan att få 10Mkr i handen, eller att singla slant. Om han gissar rätt får han 25Mkr, gissar han fel får han inget. Vad väjer han?

Vårt val av nyttofunktion är oftast beroende av våra tillgångar utanför det undersökta problemet.

15

## Certaintty equivalent

Vi återvänder till slantsingling Antag att en person kan välja mellan att singla slant eller låta bli.

- Om han väljer att singla slant
  - Om han gissar rätt får han utfallet $c$
  - Om han gissar han fel får han utfallet $a$
- Om han väljer att ej singla slant får han utfallet $b$ med säkerhet.

Vi låter nu personen välja $b$ så att det är likgiltigt om han tar $b$ eller spelar spelet och tar den eventuella vinsten.

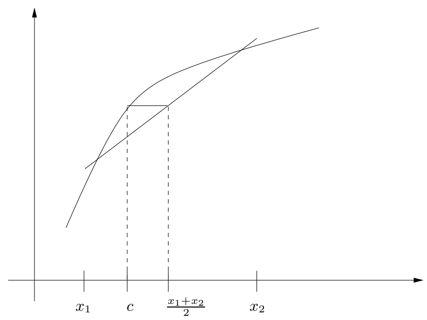
16

## Certainty equivalent

$b$ kallas för "certainty equivalent" och vi har att $u(a) + u(c) = 2u(b)$. Mer generellt gäller att ekvivalenten till en stokastisk variabel $X$ ges av

$$u(\text{cetrainty equivalent}) = \mathsf{E}u(X)$$

## Nyttofunktionens egenskaper






## Hur hittar vi en persons nyttofunktion?

Antag att vi har två utfall $a, b$ med $u(a) < u(b)$ och sannolikheten $0.5$ för varje utfall. Be personen välja ett $b$ så att det är likgiltigt om personen får $b$ eller utfallet av slantsinglingen.

Antag att vi har tillstånd $a, b, c$ med $u(a) < u(b) < u(c)$ samt ett mynt som ger klave upp med sannolikheten $\rho$. Med avkastning för slantsingling som tidigare låter vi personen välja det $\rho$ som gör att det ej spelar någon roll om man singlar slant eller inte.



## Stora talens lag

Om vi har ett antal oberoende likafördelade stokastiska variabler med utfall $X_i$, $\mathrm{Var}[X] < \infty$, $\mathsf{E}[X] = \mu$ så har vi att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_1^n X_i}{n} \to \mu$$

Om vi spelar ett stort antal spel med avkastning $X$ får vi därför totala avkastningen.

$$\prod_i^n X_i = e^{\sum_i^n \log(X_i)} \to e^{n\mathsf{E}[\log(X_i)]}$$



## Logaritmisk nyttofunktion

Den logaritmiska nyttofunktionen ger bäst avkastning med sannolikhet 1 då antalet investeringsomgångar går mot $\infty$. Den är dock ganska riskfylld.

Vi kan därför i stället använda en power utility med $c < 0$.

Ett annat alternativ är en s.k Kelly-strategi. Vi väljer då $\gamma \in (0, 1)$ och investerar $\gamma$ av våra pengar i strategin given av lognytta, och spara resten.



## Exempel

Vi antar att vi upprepade gånger spelar ett spel. Vi slinglar slant. Gissar vi rätt får vi 3 ggr insatsen, gissar vi fel förlorar vi insatsen.

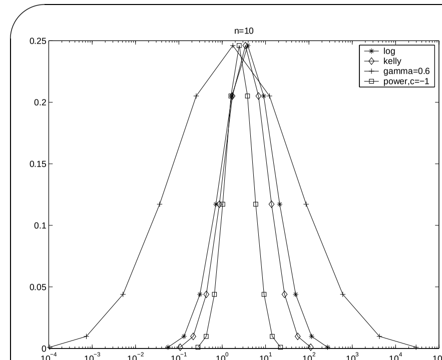
Optimal satsning ges av

$\gamma = 0.25$ För log-optimalt spel

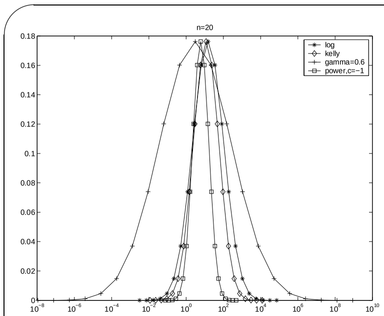
$\gamma = 0.2$ För Kelly -strategi med parameter 0.8.

$\gamma = 0.121$ för power-utility med parameter c=-1.

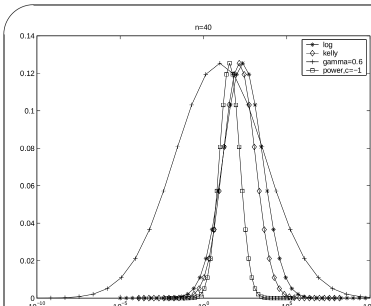


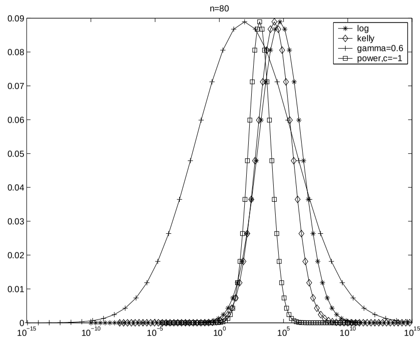




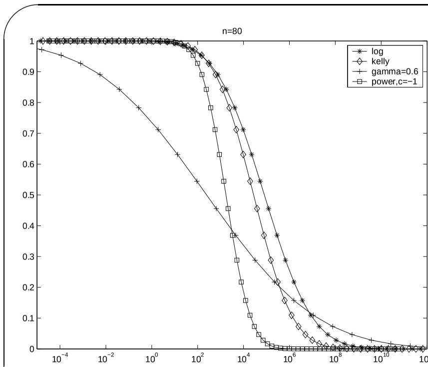






n=80
log
kelly
gamma=0.6
power,c=−1




n=80
log
kelly
gamma=0.6
power,c=−1