L'Hospitals första regel.

Antag att $f(a) = f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad (n \geq 1)$, och att $g(a) = g'(a) = g''(a) = \ldots = g^{(n-1)}(a) = 0$, men $g^{(n)}(a) \neq 0$. Antag också att $f^{(n)}(x)$ och $g^{(n)}(x)$ är kontinuerliga i en omgivning till a. Då är

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

Bevis:

Villkoren medger Taylorutveckling av $f(x)$ och $g(x)$ kring $x = a$ med restterm av ordning n. Alla termer före resttermen blir enligt förutsättningarna noll, och vi får

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi_1)}{\frac{(x-a)^n}{n!} g^{(n)}(\xi_2)} = \frac{f^{(n)}(\xi_1)}{g^{(n)}(\xi_2)}, \text{ där } \xi_1, \xi_2 \in [a, x].$$

Men $x \to a \quad \Rightarrow \quad \xi_1 \to a,\ \xi_2 \to a$, och då $f^{(n)}(x)$ och $g^{(n)}(x)$ är kontinuerliga i a, kan vi därför skriva

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a) + \epsilon_1(x)}{g^{(n)}(a) + \epsilon_2(x)}, \text{ där } \epsilon_1(x) \to 0,\ \epsilon_2(x) \to 0 \text{ då } x \to a.$$

Låt $x \to a$, resultatet följer.

Anm.
Satsen innebär att

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ldots = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)},$$

eftersom vi kan tillämpa den successivt på derivatorna, så länge dessa är noll i $x = a$.