

Tentamen i Matematik K, del D, 1996-05-24 kl 14.15-18.15

Hjälpmedel: bifogad formelsamling (Maclaurinutvecklingar och laplacetransformer)

Telefon: Fredrik Abrahamsson, ankn. 5341

OBS! Linje och antagningsår samt namn och personnummer skall anges på samtliga inlämnade blad.

- =====
- Visa att kraftfältet $\mathbf{F} = (y \sin yz, 1 + x \sin yz + xyz \cos yz, xy^2 \cos yz)$ är ett konservativt kraftfält (gradientfält) och bestäm en skalär potential till \mathbf{F} .
 - \mathbf{F} verkar på ett föremål som förflyttas rätlinjigt från $(1, \pi, 1/2)$ till $(1/2, 1, \pi)$. Beräkna det arbete som uträttas.
 - Beräkna $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{1 + \tan x}{\cos 6x}$
 - Beräkna konstanten a så att gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x - \ln(1 + ax)}{e^{-\frac{x}{2}} - \cos \sqrt{x}}$ existerar, och beräkna gränsvärdet.
 - Använd laplacetransformen för att lösa följande system av differentialekvationer:
$$\begin{aligned}x' - 2x + y &= 0 \\y' - x - 2y &= 0 \\x(0) &= 1, y(0) = 0\end{aligned}$$
 - Beräkna $\iiint_V \frac{x + y + z}{1 + x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$,
där $V = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \leq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$.
 - Bestäm de punkter på ytan $x^4 + y^4 + z^4 = 1$ som ligger närmast origo respektive längst från origo.
 - Beräkna kurvintegralen $\int_{\gamma} \left(\frac{y^2}{1 + xy^2} + \frac{1}{1 + x^4} \right) dx + \frac{2xy}{1 + xy^2} dy$, där γ är kurvan
 $(x, y) = (2e^{\sin 2t}, 2 \sin t), \quad t: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$.
 - Beräkna den gemensamma volymen för två klot med radierna 1 och 2 och avståndet 2 mellan medelpunkterna.
 - Bevisa fördröjningssatsen för laplacetransformer. (2p)
 - Formulera Greens formel med förutsättningar. (2p)
 - Låt C_1 och C_2 vara två positivt orienterade cirklar som båda omsluter punkten A .
Låt vidare $P(x, y)$ och $Q(x, y)$ vara sådana funktioner att (VAR GOD VÄND!)

- 1) $Pdx + Qdy$ är en exakt differentialform överallt utom i punkten A,
- 2) P och Q uppfyller villkoren i Greens formel utom i punkten A.

Då gäller: $\oint_{C_1} Pdx + Qdy = \oint_{C_2} Pdx + Qdy$. Motivera detta påstående!

(Full poäng kräver behandling av två fall

(4p)

LF