Tentamen i Matematik K, del D, 1996-08-26 kl 8.45-12.45

Hjälpmedel: Bifogad formelsamling (Maclaurinutvecklingar och laplacetransformer)
Telefon:
OBS! Linje och antagningsår samt namn och personnummer skall anges på samtliga inlämnade blad.
==

1. Låt **F** vara vektorfältet **F** = $(y^2z,\ 2xyz + z^2,\ xy^2 + 2yz)$.
   a) Beräkna div **F**
   b) Beräkna rot **F**
   c) Visa att **F** är ett gradientfält och bestäm den potential som har värdet 1 i origo
   d) Beräkna kurvintegralen $\int_C F \cdot dr$ då C är räta linjen från (1,2,1) till (0,1,1).

2. Beräkna $\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy$, där D är triangeln med hörnen i (0,0), (1,0) och (0,1).

3. Beräkna kurvintegralen $\int_C (2-y)dx - (1-y)dy$, där C är cykloidbågen
   (x,y) = $(t - \sin t,\ 1 - \cos t)$, t: $0 \to 2\pi$.

4. Bestäm med laplacetransform y(t) för $t > 0$, om y(0) = 3, $y'(0)$ = -1 och
   $y'' - 2y' - y + 2\int_0^t y(s)ds = -4$ då $t \geq 0$.

5. a) Maclaurinutveckla funktionen $\frac{1 - e^{-x^2}}{x}$. Ta med två termer och restterm.
   b) Beräkna ett närmevärde på $\int_0^{1/2} \frac{1 - e^{-x^2}}{x}dx$ genom att använda utvecklingen i a).
   c) Ge en övre begränsning för felet i b) med hjälp av resttermen.

6. Kurvan $y = e^{-x^2}$ skall approximeras med en rät linje $y = 1 + ax$ i intervallet [0,1].
   Ett lämpligt mått på avvikelsen är integralen $\int_0^1 (1 + ax - e^{-x^2})^2 dx$ (jfr minsta kvadrat-metoden). Bestäm parametern a så att denna integral blir minimal.

7. Tyngdpunkten (x_T, y_T, z_T) för en kropp K beräknas enligt följande:
   $x_T = \frac{1}{m(K)}\iiint_K x dxdydz$, där m(K) är kroppens volym. y_T och z_T beräknas analogt.
   Beräkna tyngdpunkten för kroppen K = {(x,y,z): $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2,\ z \geq a\sqrt{x^2 + y^2}$ },
   där $a > 0$.

(VAR GOD VÄND!)

8. a) Kurvorna C_1 och C_2 har gemensam startpunkt och gemensam slutpunkt, men skär inte varandra i övrigt. P och Q är två funktioner $R^2 \to R$. Antag att du genom kurvparametrisering kan beräkna $I_1 = \int_{C_1} Pdx + Qdy$ men inte $I_2 = \int_{C_2} Pdx + Qdy$.

Kanske går det då att komma åt även I_2 genom att använda Greens formel. Beskriv hur detta går till och ange de villkor som krävs för att detta skall vara tillåtet.

b) Den generaliserade enkelintegralen $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ kan beräknas med hjälp av en viss generaliserad dubbelintegral. Genomför detta! (4+4p)

LF