MATEMATIK, Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Matematik K, del D (TMA151) 1998-05-30, kl 14.15-18.15.
Hjälpmedel: Bifogat formelblad, ej räknedosa.
Telefonvakt: Patrik Lundström, ankn. 5325.

1. (a) Maclaurinutveckla $f(x) = \sin(\arctan x^2)$. Ta med termer åtminstone t.o.m. grad 9.
   (b) Bestäm ett heltal n så att gränsvärdet
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\arctan x^2) - x^2}{x^n}$$
   existerar och är skilt från noll. Ange dessutom gränsvärdet då n antar detta värde.

2. Beräkna
   $$\iint_D x^2 e^{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy,$$
   där $D = \{(x,y) : a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2\}$ med $0 \le a \le b$.

3. Beräkna största och minsta värde av $x(1-y)$, då (x,y) ligger på enhetscirkeln $\{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$.

4. Lös t.ex. med hjälp av Laplace-transformering differentialekvationen
   $$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = \delta''(t) & \text{då } t \ge 0, \\ y(t) = 0 & \text{då } t < 0. \end{cases}$$

5. Beräkna
   $$\int_\gamma \left(xe^x - \frac{y^2 \sin x}{2} \right) dx + \left(e^{\sin y} + y \cos x \right) dy,$$
   där γ är kurvan $y = 1 - 2x^2$ från $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ till $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$.

6. Bestäm alla värden på parametern a för vilka fältet
   $$(6xz + 5yz^2, 4z + axz^2, 3x^2 + 4y + 2axyz)$$
   är ett gradientfält och bestäm en potential för fältet då a har något av dessa värden.

7. För vilket värde på s i intervallet $0 < s < 5$ antar integralen
   $$\int_1^{\frac{1}{s}} \frac{\sin(sx)}{x} dx$$
   sitt minsta värde?

8. (a) Ge Taylors formel med Lagranges restterm. (Inget bevis behövs.)
   (b) Härled Maclaurinutvecklingen av $\arctan x$ med restterm.
   (c) Definiera Laplace-transformen av en funktion $y(t)$.

LYCKA TILL! /Stefan.