1. Dominansprincipen

Ett värdepapper som definieras i termer av andra värdepapper kallas ett finansiellt derivat. Rättigheten men ej skyldigheten att köpa ett givet värdepapper ett framtida datum till ett i förväg uppgjort pris kallas en köpoption. Aktier och optionskontrakt är mycket gamla företeelser. Aktier har varit kända under minst 750 år. Aktiehandel i organiserad form startade troligen först i Antwerpen 1531. Den amerikanske ekonomen och nobelpristagaren Merton berättar i sin bok "Continuous-Time Finance" $[MER1]$ om handel i köpoptionsliknande instrument på Amsterdams fondbörs för 350 år sedan. Optionskontrakt på jordbruksprodukter användes för övrigt redan av medeltidens köpmän $[GEM]$. Att värdera finansiella derivat på ett teoretiskt övertygande sätt har emellertid varit svårt i historien och problemet fick ingen tillfredsställande lösning förrän under 1970-talet. Begreppet arbitrage dvs riskfri vinst är här mycket centralt. Det mest komplicerade momentet i detta sammanhang består dock av att förstå de underliggande värdepapperens prisdynamik. Den matematiska teorin för stokastiska processer har hittills spelat en avgörande roll för de framsteg som gjorts.

Ett centralt moment inom optionsteorin består av att utifrån olika hypoteser definiera priser för finansiella derivat. Sådana priser kallas ofta teoretiska priser. I detta kapitel uppmärksammar vi den så kallade dominansprincipen som dels gör det möjligt att prissätta några viktiga derivat, dels ger upp- och nedskattningar av tänkbara priser för olika finansiella derivat. På marknaden finns så kallade marknadspriser och det är naturligtvis önskvärt att teoretiska priser överensstämmer med marknadens priser. I denna framställning förutsätts alltid att kapitalmarknaden i vår modell är friktionsfri. I begreppet friktionsfri marknad inbegripes gratis transaktioner av värdepapper samt att in- och utlåningsräntan är lika. Därutöver antas att lån av värdepapper är kostnadsfria samt att handel förekommer i delar av värdepapper. Dessa överförenklingar av verkligheten är vanliga i de flesta framställningar av finansiella derivat och kan naturligtvis förorsaka skillnader mellan teoretiska priser och marknadens priser. Forskning mot mer realistiska modeller pågår men faller utanför ramen för denna framställning. Om inte annat anges förutsätts också att aktier ej ger utdelning och att räntan är konstant. För tydlighets skull vill vi påpeka att begreppet friktionsfri marknad ej innebär att det är kostnadsfritt att låna pengar. En hundralapp skall därför inte uppfattas som ett värdepapper.

Inledningsvis betraktar vi endast finansiella derivat, som definieras av ett enda värdepapper, nämligen en aktie. Aktiens pris vid tiden t betecknas med $S(t)$. Låt nu T vara ett givet framtida datum och antag att ett visst derivat i aktien kan inlösas vid tiden T och då utbetalar beloppet $g(S(T))$. Ett sådant derivat sägs vara ett enkelt derivat av europeisk typ eller ett enkelt kontrakt av europeisk typ. Här kallas g utbetalningsfunktion eller kontraktsfunktion och T kallas slutdag för kontraktet. Ett motsvarande amerikanskt kontrakt med utbetalningsfunktionen g kan lösas in vid vilken tidpunkt t som helst före eller på slutdagen T om kontraktsinnehavaren så önskar och utbetalar då beloppet $g(S(t))$. Med våra konventioner kan en utbetalningsfunktion antaga negativa värden. Ett kontrakt där innehavaren förbinder sig att köpa aktien till priset K ett framtida datum T är likvärdigt med ett finansiellt derivat av europeisk typ med utbetalningsfunktionen $S(T) - K$. Här är $g(s) = s - K$.

Antag nu att K är ett givet positivt tal. En europeisk köpoption i aktien med lösenpris K och slutdag T är rättigheten, men ej skyldigheten, att köpa en aktie till priset K vid tiden T. En europeisk säljoption i aktien med lösenpris K och slutdag T är rättigheten, men ej skyldigheten, att sälja en aktie till priset K vid tiden T. På liknande sätt är en amerikansk köpoption (säljoption) i aktien med lösenpris K och slutdag T rättigheten, men ej skyldigheten, att vid ett tillfälle köpa (sälja) en aktie till priset K under tidsperioden från nu fram till och med tidpunkten T. Slutdagen för en aktieoption av europeisk typ kallas också lösendagen. Ett enkelt derivat av europeisk typ med utbetalningsfunktionen

$$c(s) = \max(0, s - K)$$

och slutdagen T är på en friktionsfri marknad ekvivalent med en europeisk köpoption med lösenpriset K och lösendagen T. Notera också att på en friktionsfri marknad är ett enkelt derivat av europeisk typ med utbetalningsfunktionen

$$p(s) = \max(0, K - s)$$

och slutdagen T ekvivalent med en europeisk säljoption med lösenpriset K och lösendagen T. Köpoption heter "call" på engelska och säljoption "put", vilket ligger till grund för våra beteckningar.

En uppsättning värdepapper kallas en portfölj. Vi tillåter värdepappersinnehav i delar av värdepapper, som eventuellt kan vara negativa. Den som lånat en aktie och sedan sålt densamma har en skuld på 1 aktie vilket uppfattas som ett innehav av -1 aktier. En utfärdad köpoption uppfattas som ett innehav av -1 köpoptioner osv. Antag ξ är ett reellt tal. Om en portfölj $\mathcal{A}$ innehåller a_k värdepapper $\mathcal{U}_k$, $k = 1, .., n$, och inga andra värdepapper så är $\xi\mathcal{A}$ den portfölj som innehåller ξa_k värdepapper $\mathcal{U}_k$, $k = 1, .., n$, och inga andra värdepapper. Vi antar alltid att det finns obligationer i vår kapitalmarknadsmodell. Om inte annat sägs antar vi att vår modell innehåller en och endast en obligation vars pris $B(t)$ vid tiden t ges av ekvationen

$$B(t) = Ce^{rt}$$

där C och r är positiva konstanter. Observera att

$$B(t) = B(0)e^{rt}.$$

Vi uppfattar här storheten r som kontinuerlig ränta. Om beloppet K placeras i bank vid tiden t blir banksaldot lika med $Ke^{r(T-t)}$ vid tiden $T \geq t$.

En huvuduppgift i denna framställning är att postulera egenskaper som leder fram till ett explicit teoretiskt värde $\Pi_{\mathcal{U}}(t)$ för ett enskilt finansiellt derivat $\mathcal{U}$ vid tiden t. Genom superposition får varje portfölj $\mathcal{A}$ ett teoretiskt värde $V_{\mathcal{A}}(t)$ vid tiden t, betingat av att $\mathcal{A}$ existerar vid denna tidpunkt. Observera att en portföljinnehavare vars portfölj innehåller en utfärdad amerikansk option ej själv styr över portföljens eventuella existens imorgon.

I detta kapitel postulerar vi den så kallade dominansprincipen, som kommer att sätta vissa gränser för funktionen Π.

Dominansprincipen. *Om T är ett framtida datum och portföljinnehavaren med säkerhet kan agera så att $V_{\mathcal{A}}(T) \geq 0$ så har portföljen $\mathcal{A}$ ett icke-negativt värde från idag t o m tiden T.*

Om dominansprincipen ej gäller så finns ett framtida datum T och en portfölj $\mathcal{A}$ så att $V_{\mathcal{A}}(T) \geq 0$ och $V_{\mathcal{A}}(t) < 0$ där $t < T$. Vi bildar nu vid tiden t en portfölj $\mathcal{B}$ bestående av $\mathcal{A}$ och ett antal obligationer så att $V_{\mathcal{B}}(t) = 0$. Konstruktionen visar att $V_{\mathcal{B}}(T) > 0$ så vi får en riskfri vinst. Om en portfölj har ett icke-negativt värde idag så säger dominansprincipen ingenting om dess värde imorgon.

I resten av kapitlet tar vi dominansprincipen som ett axiom, dvs vi utgår från att principen ifråga gäller.

Om en portfölj $\mathcal{A}$ består av aktier, obligationer och derivat av europeisk typ och portföljen är värdelös vid en viss framtida tidpunkt T dvs $V_{\mathcal{A}}(T)$ $= 0$, så medför dominansprincipen att portföljen är värdelös idag. Dominansprinciper ger nämligen först att $V_{\mathcal{A}}(t) \geq 0$ idag. Eftersom

$$V_{-\mathcal{A}}(T) = -V_{\mathcal{A}}(T) = 0$$

följer därför att $-V_{\mathcal{A}}(t) = V_{-\mathcal{A}}(t) \geq 0$ idag och därmed är portföljen värdelös idag dvs $V_{\mathcal{A}}(t) = 0$. Om två portföljer $\mathcal{A}$ och $\mathcal{B}$ består av aktier, obligationer och derivat av europeisk typ och $V_{\mathcal{A}}(T) = V_{\mathcal{B}}(T)$ ett viss framtida datum T så medför dominansprincipen att portföljerna har samma värden idag. Om $V_{\mathcal{A}}(T) \leq V_{\mathcal{B}}(T)$ så följer också att $V_{\mathcal{A}}(t) \leq V_{\mathcal{B}}(t)$ idag.

Betrakta nu en portfölj $\mathcal{A}$ som innehåller en amerikansk säljoption med slutdag T och lösenpris K och en utfärdad europeisk säljoption med lösendag T och lösenpris K. Om portföljinnehavaren bestämmer sig för att inte lösa in den amerikanska säljoptionen före slutdagen så gäller att $V_{\mathcal{A}}(T) = 0$. Alltså blir $V_{\mathcal{A}}(t) \geq 0$, enligt dominansprincipen. Vi kan emellertid inte denna gång hävda att $V_{-\mathcal{A}}(T) = 0$. Portföljen $-\mathcal{A}$ innehåller nämligen en utfärdad amerikansk säljoption med slutdagen T. Om innehavaren av den amerikanska säljoptionen bestämmer sig för att lösa in kontraktet före slutdagen existerar därför inte portföljen $-\mathcal{A}$ vid tiden T. Man kan visa att det är optimalt att lösa in en amerikansk säljoption före slutdagen om aktiepriset är tillräckligt litet (om $t < T$ och $(K - S(t))e^{r(T-t)} > K$ kan det inte vara optimalt att avstå från att lösa in den amerikanska säljoptionen i intervallet $[t, T[)$. Man måste vara en smula försiktig vid tillämpning av dominansprincipen för portföljer som innehåller amerikanska kontrakt.

För att belysa dominansprincipen betraktar vi ett enkelt europeiskt derivat i aktien med slutdagen T och utbetalningsfunktionen

$$g(s) = s.$$

Låt $v(t)$ beteckna derivatets värde vid tiden t. Bilda nu en portfölj bestående av derivatet och en annan portfölj bestående av en aktie. Dessa portföljer har samma värde vid tiden T. Alltså är

$$v(t) = S(t).$$

I nästa exempel studeras ett kontrakt som förbinder innehavaren att köpa aktien till priset K ett visst framtida datum T. Kontraktet är likvärdigt med ett aktiederivat av europeisk typ med slutdagen T och utbetalningsfunktionen

$$g(s) = s - K.$$

På en marknad där dominansprincipen gäller får det aktuella derivatet värdet

$$S(t) - Ke^{-r\tau}$$

vid tiden t där $\tau = T - t$. Vid tiden T har nämligen derivatet ifråga samma värde som en portfölj bestående av 1 aktie och $-K/B(T)$ obligationer. Observera att räntan r är känd, så obligationspriset $B(T)$ är känt före tiden T. Väljs K så att motsvarande kontrakt är värdelöst vid teckningstiden t kallas K för aktiens terminspris vid tiden t för leverans vid tiden T och betecknas med $S^T_{term}(t)$. Alltså gäller att

$$S^T_{term}(t) = S(t)e^{r\tau}.$$

Ett terminskontrakt som tecknats vid tiden t har vid leverans värdet

$$S(T) - S(t)e^{r\tau}$$

eftersom innehavaren av kontraktet betalar priset $S(t)e^{r\tau}$ för en aktie som är värd $S(T)$. Detta värde kan i praktiken vara ett mycket stort belopp och för att minska risken för kreditförluster kan man tänka sig följande variation av kontraktet. Fixera ett positivt heltal N. Sätt $h = \tau/N$ och $t_n = t + nh$, $n = 0, ..., N$. Betrakta ett kontrakt som innebär att innehavaren vid tiden t_{n-1} tecknar ett terminskontrakt med leverans vid tiden t_n för $n = 1, ..., N$. Innehavaren av kontraktet erhåller vid tiden t_n en insättning på sitt bankkonto svarande mot beloppet

$$S(t_n) - S(t_{n-1})e^{rh}$$

för $n = 1, ..., N$. Vid tiden T blir banksaldot

$$\sum_{n=1}^{N} (S(t_n) - S(t_{n-1})e^{rh})e^{(T-t_n)r}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} (S(t_n)e^{(T-t_n)r} - S(t_{n-1})e^{(T-t_{n-1})r})$$

$$= S(T) - S(t)e^{r\tau}.$$

Det aktuella kontraktet är således vid tidpunkten t ekvivalent med en aktietermin med leverans vid tiden T. Observera här att en insättning av beloppet a på ett bankkonto är likvärdigt med ett uttag av beloppet $-a$ på samma konto.

Betrakta nu ett kontrakt som förbinder innehavaren att köpa en dollar till priset K kr ett visst framtida datum T. Vi kan inte direkt använda ovanstående resultat för att värdera kontraktet vid tiden $t < T$. En dollar skiljer sig mycket från en aktie. T ex är ett dollarlån ej gratis ens på en friktionsfri marknad. Antag att dollarkursen är lika med $\xi(t)$ kr vid tiden t. Det aktuella kontraktet har, uttryckt i kr, värdet

$$Y = \xi(T) - K$$

vid tiden T. För att värdera detta kontrakt antages att den amerikanska marknaden erbjuder en obligation med priset $B_a(t) = B_a(0)e^{r_a t}$ vid tiden t, där $B_a(0)$ och r_a är positiva konstanter. Vi kan nu uppfatta

$$S(t) = B_a(t)\xi(t), \ t \geq 0$$

som prisprocessen för ett svenskt värdepapper. Observera att

$$Y = B_a(T)^{-1}(S(T) - B_a(T)K)$$

så dominansprincipen ger att kontraktet vid tiden $t < T$ har det teoretiska värdet

$$v(t) = B_a(T)^{-1}(S(t) - B_a(T)Ke^{-r\tau})$$

där $\tau = T - t$. Efter förenkling erhålls

$$v(t) = \xi(t)e^{-r_a\tau} - Ke^{-r\tau}.$$

Väljs K så att motsvarande kontrakt är värdelöst vid teckningstiden t kallas K för terminskursen för dollar vid tiden t för leverans vid tiden T och betecknas med $\xi^T_{term}(t)$. Alltså gäller

$$\xi^T_{term}(t) = \xi(t)e^{(r-r_a)\tau}$$

(kontrollera att detta resultat är konsistent med dagstidningarnas noteringar!).

Vi kan som exemplen ovan visar värdera en del derivat av intresse med mycket enkla metoder. Svårigheten ökar dock snabbt. Det finns ingen möjlighet att på ett meningsfullt sätt definiera priset av en köpoption genom att endast postulera dominansprincipen.

Fr o m nu skriver vi $\Pi_{\mathcal{U}}(t) = c(t, S(t), K; T)$ om $\mathcal{U}$ är en europeisk köpoption i aktien med lösenpris K och slutdag T och $\Pi_{\mathcal{U}}(t) = p(t, S(t), K; T)$ om $\mathcal{U}$ är en europeisk säljoption i aktien med lösenpris K och slutdag T. Värdena för motsvarande optioner av amerikansk typ betecknas med $C(t, S(t), K)$ respektive $P(t, S(t), K)$. Om slutdagen T framgår av sammanhanget skriver vi $c(t, S(t), K; T) = c(t, S(t), K)$ och på motsvarande sätt för de övriga optionsvärdena.

Följande relation mellan aktiepris, europeiskt köpoptionspris, europeiskt säljoptionspris och obligationspris är möjlig att visa med hjälp av dominansprincipen, nämligen

$$S(t) - c(t, S(t), K) = Ke^{-r\tau} - p(t, S(t), K).$$

Vi behöver bara konstatera att relationen ifråga är sann för $t = T$ samtidigt som vi noterar att vänstra ledet representerar värdet av en aktie och en utfärdad europeisk köpoption och högra ledet värdet av $K/B(T)$ obligationer och en utfärdad europeisk säljoption. Dominansprincipen medför att likheten även gäller före slutdagen (relationen kallas "put-call parity relation" på engelska). Relationen visar att den europeiska säljoptionen är lätt att värdera, så snart vi kan prissätta den europeiska köpoptionen. Vi ser också att värdet $p(S(T))$ vid tiden T är uppnåeligt på en kapitalmarknad som endast består av aktien, den europeiska köpoptionen och obligationen.

Betrakta nu för givna positiva konstanter A, B, K och L funktionen

$$g(s) = \min(A(s-K)^+, B(L-s)^+)$$

där $K < L$ och där s är en positiv variabel. Denna polygonfunktions derivata har tre språngpunkter. Om vi subtraherar funktionen $B(L-s)^+$ från funktionen $g(s)$ så erhålls en polygonfunktion vars derivata har två språngpunkter. Man inser nu lätt att en lämplig kombination av säljoptioner med olika löptid har värdet $g(S(T))$ vid tiden T. Vi utnyttjar här handel i delar av värdepapper. Värdet $g(S(T))$ vid tiden T är därför uppnåeligt på en kapitalmarknad som endast består av aktien, europeiska köpoptioner och obligationen.

Om $g(s)$ betecknar en godtycklig polygonfunktion i intervallet $s > 0$ så inser vi på liknande sätt att värdet $g(S(T))$ vid tiden T är uppnåeligt på en kapitalmarknad som endast består av aktien, obligationen och europeiska köpoptioner i aktien. Så snart europeiska köpoptioner tilldelats teoretiska värden, erhåller vi alltså teoretiska värden för en stor klass av enkla europeiska aktiederivat. Notera i detta sammanhang att en godtycklig, reellvärd kontinuerlig funktion på ett kompakt intervall $[a, b]$ kan approximeras likformigt med polygonfunktioner enligt analysens grunder.

Låt I vara ett delintervall av reella tallinjen. En funktion $f : I \to \mathbf{R}$ kallas konvex om

$$f(pa + (1-p)b) \le pf(a) + (1-p)f(b)$$

för alla $a, b \in I$ och alla $0 < p < 1$. Funktionen sägs vara strängt konvex om olikheten

$$f(pa + (1-p)b) < pf(a) + (1-p)f(b)$$

gäller för alla $0 < p < 1$ och alla $a, b \in I$, som uppfyller $a \neq b$. En reellvärd stokastisk variabel X sägs vara 2-punktsfördelad om det existerar $a, b \in \mathbf{R}$, där $a \neq b$, så att

$$P[X = a] = p$$

och

$$P[X = b] = 1 - p$$

där $0 < p < 1$. Här definieras väntevärdet $E[X]$ av X genom att

$$E[X] = aP[X = a] + bP[X = b]$$

dvs

$$E[X] = pa + (1-p)b$$

(bokstaven E kommer från engelskans "expectation".) Alltså gäller att

$$f(E[X]) \le E[f(X)]$$

för varje konvex funktion $f : I \to \mathbf{R}$ och 2-punktsfördelad stokastisk variabel $X : \Omega \to I$, där I är ett delintervall av reella tallinjen. Denna olikhet kallas Jensens olikhet (för en starkare version, se övningarna i detta kapitel och Appendix). En funktion f är konkav om $-f$ är konvex. En reellvärd funktion f definierad i ett öppet intervall är konvex om $f'' \ge 0$ och konkav om $f'' \le 0$.

Antag $a, b \in \mathbf{R}$. Den affina funktionen $f(x) = ax + b$, $x \in \mathbf{R}$, är konvex. Om f och g är konvexa funktioner definierade på samma intervall I så är funktionen $h(x) = \max(f(x), g(x))$, $x \in I$, konvex. Speciellt följer härav att funktionen

$$K \to \max(0, s - K),\ \ K > 0$$

är konvex för fixt $s > 0$. Vi kan nu dra slutsatsen att en europeisk köpoption är en konvex funktion av lösenpriset K om alla andra variabler hålls fixa. Mer precist uttryckt gäller att funktionen

$$K \to c(t, S(t), K; T),\ \ K > 0$$

är konvex (kontrollera om detta resultat är konsistent med dagstidningarnas noteringar av köpoptionspriser!). För att se detta väljer vi $K_0, K_1 > 0$ och $0 \leq \lambda \leq 1$. Betrakta nu en portfölj $\mathcal{A}$ bestående av 1 europeisk köpoption i aktien med lösendag T och lösenpris $\lambda K_0 + (1-\lambda)K_1$ och en portfölj $\mathcal{B}$ bestående av λ europeiska köpoptioner i aktien med lösendag T och lösenpris K_0 och $(1-\lambda)$ europeiska köpoptioner i aktien med lösendag T och lösenpris K_1. Vi vet att

$$\max(0, S(T) - (\lambda K_0 + (1-\lambda)K_1))$$
$$\leq \lambda \max(0, S(T) - K_0) + (1-\lambda) \max(0, S(T) - K_1)$$

dvs att

$$V_{\mathcal{A}}(T) \leq V_{\mathcal{B}}(T).$$

Dominansprincipen visar nu att $V_{\mathcal{A}}(t) \leq V_{\mathcal{B}}(t)$ för $t < T$ vilket är ekvivalent med påståendet.

Vi avslutar kapitlet med en del resultat för optioner av amerikansk typ. Vi påstår först att det inte optimalt att lösa in en amerikansk köpoption före slutdagen då aktien ej ger utdelning. Det gäller nämligen att

$$C(t, S(t), K; T) > S(t) - K,\ \ t < T.$$

För att se detta bildas vid tiden t en portfölj $\mathcal{A}$ bestående av 1 amerikansk köpoption med lösenpris K och slutdag T, -1 aktie och $K/B(T)$ obligationer. Om portföljinnehavaren bestämmer sig för att ej lösa in den amerikanska köpoptionen före dess slutdag följer att

$$V_{\mathcal{A}}(T) = C(T, S(T), K; T) - S(T) + (K/B(T))B(T)$$
$$= \max(0, S(T) - K) - S(T) + K \geq 0.$$

Dominansprincipen ger nu att $V_{\mathcal{A}}(t) \geq 0$ dvs

$$C(t, S(t), K; T) - S(t) + (K/B(T))B(t) \geq 0$$

och således måste för $t < T$ gälla att

$$C(t, S(t), K; T) \geq S(t) - (K/B(T))B(t) > S(t) - K.$$

Det är därför inte optimalt att lösa in en amerikansk köpoption före slutdagen då aktien ej ger utdelning och härav följer att $C(t, S(t), K; T) = c(t, S(t), K; T)$ i detta fall.

Betrakta en investerare X med en värdepappersportfölj $\mathcal{A}$ vid tiden t, där portföljen eventuellt innehåller en del utfärdade optioner av amerikansk typ. Om en utfärdad option löses in i intervallet $]t, T]$ antas att skulden omedelbart regleras med tillgångar i värdepapper och eventuellt med pengar som X lånar till räntan r. Vid tiden T förfogar X över en portfölj som vi betecknar med $\mathcal{B}$ (lånade pengar uppfattas som ett negativt antal obligationer). Antag att X med säkerhet kan agera så att $V_{\mathcal{B}}(T) \geq 0$. Om vi under dessa förutsättningar kan dra slutsatsen att $V_{\mathcal{A}}(t) \geq 0$ så säger vi att den starka dominansprincipen gäller. Som en illustration av denna princip skall vi nu visa den till synes självklara olikheten

$$K \geq P(t, S(t), K; T).$$

Låt därför $\mathcal{A}$ vara en portfölj vid tiden t bestående av $K/B(t)$ obligationer och en utfärdad säljoption av amerikansk typ med lösenpris K och slutdag T. Om säljoptionen aldrig löses in blir

$$V_{\mathcal{B}}(T) = (K/B(t))B(T) \geq 0.$$

Om säljoptionen blir inlöst vid tiden $t_0 \in]t, T]$ och X reglerar skulden med ett lån så gäller att

$$\begin{aligned} V_{\mathcal{B}}(T) &= (K/B(t))B(T) - (K - S(t_0))e^{r(T-t_0)} \\ &= K(e^{r(T-t)} - e^{r(T-t_0)}) + S(t_0)e^{r(T-t_0)} \geq 0. \end{aligned}$$

Den starka dominansprincipen medför nu att $V_{\mathcal{A}}(t) \geq 0$ och det följer att $K - P(t, S(t), K; T) \geq 0$ eller $K \geq P(t, S(t), K; T)$. Alternativt kan X vid eventuell inlösen av den amerikanska säljoptionen sälja en del av sina obligationer till beloppet K och sedan köpa aktien till priset K. Den nya portföljen har ett icke-negativt värde vid tiden T.

Den starka dominansprincipen ger att

$$C(t, S(t), K; T) - P(t, S(t), K; T) \geq S(t) - K$$

(visa detta som övning). Observera att

$$C(t, S(t), K; T) - P(t, S(t), K; T) \leq S(t) - Ke^{-r(T-t)}.$$

Med hjälp av olika dominan sprinciper kan vi sätta gränser för optionspriser men i regel ej nå fram till exakta teoretiska priser. För detta behövs helt enkelt en mer precis uppfattning av aktiers prisdynamik. Detta är ett svårt men fascinerande problem, som vi skall återkomma till senare i denna framställning.

Övningar

I nedanstående övningar i detta kapitel förutsätts att marknaden erbjuder en aktie, en obligation och olika typer av aktiederivat. Vi antager dessutom att dominansprincipen gäller. Aktiens pris vid tiden t betecknas med $S(t)$ och obligationens pris vid tiden t är lika med $B(t) = B(0)e^{rt}$. Om $t \leq T$ så är $\tau = T - t$.

1. Visa att

$$T_0 \leq T_1 \Rightarrow c(t, S(t), K; T_0) \leq c(t, S(t), K; T_1).$$

2. Visa att

$$K_0 \geq K_1 \Rightarrow c(t, S(t), K_0) \leq c(t, S(t), K_1)$$

och dra slutsatsen att

$$0 \geq \frac{\partial}{\partial K} c(t, S(t), K)$$

om derivatan i höger led existerar.

3. Visa att

$$c(t, S(t), K) \leq S(t)$$

och

$$\lim_{T \to \infty} c(t, S(t), K; T) = S(t).$$

4. Visa att

$$K_0 \geq K_1 \Rightarrow c(t, S(t), K_0) \geq c(t, S(t), K_1) - e^{-r\tau}(K_0 - K_1).$$

Visa därefter att

$$\frac{\partial}{\partial K} c(t, S(t), K) \geq -e^{-r\tau}$$

om derivatan i vänster led existerar.

5. Visa att

$$\lim_{S(t) \to 0} c(t, S(t), K) = 0.$$

6. Visa att

$$2p(t, S(t), \frac{K_0 + K_1}{2}) \leq p(t, S(t), K_0) + p(t, S(t), K_1).$$

7. Visa att

$$P(t, S(t), K) \geq \max(0, K - S(t)).$$

8. En aktie har priset $S(t)$ vid tiden t. Antag $t_0 < T$ och betrakta ett derivat av europeisk typ med slutdagen T som utbetalar beloppet $S(t_0)$ vid tiden T. Visa att derivatets värde vid tiden $t < t_0$ är lika med $S(t)e^{-r(T-t_0)}$. Vilket värde har derivatet vid tiden $t \in [t_0, T]$?

9. Låt $t_0 < T$ och $n \in \mathbf{N}_+$. Sätt $h = \frac{1}{n}(T - t_0)$ och $t_i = t_0 + ih$, $i = 1, ..., n$. Antag vidare att $K > 0$ och betrakta två europeiska derivat av medelvärdestyp med utbetalningarna

$$X_c = \max(0, \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} S(t_i) - K)$$

och

$$X_p = \max(0, K - \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} S(t_i))$$

vid tidpunkten T. Antag att dessa derivat har värdena $v_c(t)$ resp $v_p(t)$ vid tiden t. Visa att om $t \in [t_{m-1}, t_m[$ så gäller

$$\frac{e^{-r\tau}}{n+1} \sum_{i=0}^{m-1} S(t_i) + \frac{1 - e^{-r(n-m+1)h}}{1 - e^{-rh}} \frac{S(t)}{n+1} - v_c(t) =$$

$$Ke^{-r\tau} - v_p(t).$$

Försök att finna ett liknande samband för $t < t_0$.

10. Funktionen $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ är konvex och deriverbar. a) Visa att f' är växande och dra slutsatsen att

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

för alla $x_0, x \in]a, b[$. b) Låt X vara en stokastisk variabel med värden i $]a, b[$. Visa Jensens olikhet

$$f(E[X]) \leq E[f(X)].$$