6. Utdelningar

Antag att en aktie med priset $S(t)$ vid tiden t utdelar beloppet $D > 0$ vid tiden t_*. Vi har konventionen att $S(t_*)$ betecknar aktiekursen vid tiden t_* efter utdelning. Det är då naturligt att antaga att

$$S(t_*-) - S(t_*) = D$$

vilket i så fall innebär att trajektorian $S(t), t \geq 0$, är diskontinuerlig i punkten t_*. Aktiepriset kan därför inte längre beskrivas av en geometrisk Brownsk rörelse och den modell för optionsvärdering som vi behandlat i föregående kapitel måste förkastas. Det är för övrigt inte självklart att ett aktiepris gör ett språng av exakt samma storlek som utdelningen då utdelningen avskiljs aktien (se Heath och Jarrow $[HJ]$) men vi kommer nedan genomgående att förutsätta detta.

Det finns f ö många typer av utdelning. En aktie kan t ex utdela ett fixt belopp i kronor eller andra värdepapper. I samband med en aktieoption behöver utdelningarna i den underliggande aktien under optionens resterande livstid inte heller vara kända och kan då uppfattas som stokastiska storheter. Antag först att utdelning endast sker vid högst ett tillfälle och motsvarande tidpunkt betecknas i förekommande fall med t_*. I intervallet $[t_*, T]$ förutsätts att aktiepriset beskrivs av en geometrisk Brownsk rörelse med volatiliteten σ. Vi betecknar dagens datum med t och antar först att $t < t_*$. Vi försöker därefter finna en portfölj $\mathcal{A}$ sådan att processen

$$S^*(\lambda) = \begin{cases} V_{\mathcal{A}}(\lambda), \; t \leq \lambda < t_* \\ S(\lambda), \; t_* \leq \lambda \leq T \end{cases}$$

kan beskrivas av en geometrisk Brownsk rörelse med volatiliteten σ. Observera speciellt att

$$V_{\mathcal{A}}(t_*-) = S(t_*)$$

eftersom vi alltid förutsätter att en geometrisk Brownsk rörelse har kontinuerliga trajektorier. Genom att sälja portföljen $\mathcal{A}$ omedelbart före tiden t_* och sedan köpa en aktie då utdelningen frånskilts så kan vi uppfatta processen $(S^*(\lambda))_{t \leq \lambda \leq T}$ som prisprocessen för ett värdepapper. Antag nu att ett derivat av europeisk typ utbetalar beloppet $g(S(T))$ vid tiden T, där $g \in \mathcal{P}$. Eftersom $g(S(T)) = g(S^*(T))$ så är det naturligt att låta storheten

$$e^{-r\tau} E\left[g(s^* e^{r\tau} M_\sigma(\tau))\right]_{|s^*=S^*(t)}$$

definiera derivatets teoretiska värde vid tiden t. Som vanligt är $\tau = T - t$.

Den enklaste typen av utdelning är procentuell utdelning och vi startar med detta fall. Antag därför att aktien utdelar beloppet

$$D = \delta S(t_* -)$$

vid tiden t_* där δ är ett i förväg känt tal i intervallet $]0,1[$. För att bestämma portföljen $\mathcal{A}$ antas att aktiepriset beskrivs av en geometrisk Brownsk rörelse med volatiliteten σ före utdelningen. Det räcker därför att välja $\mathcal{A}$ som en portfölj bestående av $(1-\delta)$ aktier. Derivatets teoretiska värde vid tiden t blir lika med $v(t, S(t))$ där

$$v(t,s) = e^{-r\tau} E\left[g((1-\delta) s e^{r\tau} M_\sigma(\tau))\right],\ t < t_*.$$

Härav följer följande sats.

Sats 1. *Antag $\delta_n \in\ ]0,1[$, $n = 0, 1, ..., N$, är givna tal. En aktie utdelar beloppet $\delta_n S(t_n -)$ vid tiden t_n, där $n = 0, 1, ..., N$, och $t_0 < t_1 < ... < t_N < T$. Före första utdelningen, mellan påföljande utdelningar och efter sista utdelningen antages aktiepriset beskriva en geometrisk Brownsk rörelse med exponentiell drift där volatiliteten i varje tidsinterval är lika med σ.*

Ett enkelt europeiskt derivat i aktien med utbetalningsfunktionen $g \in \mathcal{P}$ och slutdagen T har värdet $v(t, S(t))$ vid tiden $t < t_0$ där

$$v(t,s) = e^{-r\tau} E\left[g(\left\{\prod_{n=0}^{N}(1-\delta_n)\right\} s e^{r\tau} M_\sigma(\tau))\right].$$

I nästa steg behandlar vi kontinuerlig utdelning. Antag $\delta > 0$ är ett givet tal och att en aktie utdelar beloppet $\delta S(t)dt$ i intervallet $[t, t+dt[$ för varje t. Aktiepriset antages beskriva en geometrisk Brownsk rörelse med exponentiell drift där volatiliteten är lika med σ. Betrakta nu ett enkelt europeiskt derivat med utbetalningsfunktionen $g \in \mathcal{P}$ och slutdagen T. Beroende på sats 1 definieras det teoretiska värdet $v(t, S(t))$ vid tiden $t < T$, av ekvationen

$$v(t,s) = e^{-r\tau} E\left[g(s e^{(r-\delta)\tau} M_\sigma(\tau))\right]$$

(jmfr valutaoptioner).

Ett aktiebolag utdelar ofta ett i förväg bestämt belopp D per aktie vid en given tidpunkt t_*. En geometrisk Brownsk rörelse är vid tiden t_* dock strikt mindre än D med positiv sannolikhet . Denna svårighet kan hanteras på följande sätt. Vi antar att $D < S(t)$, vilket i praktiken inte är någon begränsning, samt att

$$S(\lambda) = De^{r(\lambda - t_*)} 1_{[t,t_*[}(\lambda) + \tilde{S}(\lambda), \ t \leq \lambda \leq T$$

där $\tilde{S}(\lambda), t \leq \lambda \leq T$, betecknar en geometrisk Brownsk rörelse med volatiliteten σ. Vid tidpunkten λ kallas $\tilde{S}(\lambda)$ för den volatila delen av aktiepriset och $De^{r(\lambda-t_*)}1_{[t,t_*[}(\lambda)$ för nuvärdet av utdelningen. Portföljen $\mathcal{A}$ består i detta fall av en aktie och

$$-\frac{D}{B(t_*)}$$

obligationer. Således är

$$s^* = S(t) - De^{r(t-t_*)}.$$

Vi får också att $\tilde{S}(\lambda) = S^*(\lambda), \ t \leq \lambda \leq T$. Ett europeiskt derivat med utbetalningsfunktionen $g \in \mathcal{P}$ får således det teoretiska priset $v(t, S(t))$ vid tiden t där

$$v(t,s) = e^{-r\tau} E\left[g((s - De^{r(t-t_*)})e^{r\tau} M_\sigma(\tau)) \right].$$

Om vi vill utnyttja binomialapproximation för att finna ett approximativt optionspris vid tiden t definieras $h = \tau/N$,

$$t_n = t + nh, \ n = 0, 1, ..., N$$

och

$$v_j^N = g(s^* e^{(N-2j)\sigma\sqrt{h}}), \ j = 0, 1, ..., N.$$

Därefter beräknas successivt för tidpunkterna $t_n, n = N-1, N-2, ..., 1, 0$, motsvarande optionspriser

$$v_j^n = e^{-rh}(q_u v_j^{n+1} + q_d v_{j+1}^{n+1})$$

för $j = 0, 1, ..., n$, där

$$q_u = 1 - q_d = \frac{e^{rh} - e^{-\sigma\sqrt{h}}}{e^{\sigma\sqrt{h}} - e^{-\sigma\sqrt{h}}}.$$

Storheten v_0^0 approximerar det sökta optionsvärdet.

I samband med motsvarande amerikanska kontrakt är det lämpligt att sätta upp ett träd för den volatila delen av aktiepriset och därefter till detta addera nuvärdet av den framtida utdelningen (se t ex $[H]$). Vi definierar

$$g_j^n = \begin{cases} g(s^* e^{(n-2j)\sigma\sqrt{h}} + De^{r(t_n - t_*)}) \text{ om } t_n < t_* \\ g(s^* e^{(n-2j)\sigma\sqrt{h}}) \text{ om } t_n \geq t_* \end{cases}$$

för $j = 0, 1, ..., n$. Låt vidare $v_j^N = g(s_* e^{(N-2j)\sigma\sqrt{h}})$, $j = 0, 1, ..., N$. Därefter beräknas successivt för tidpunkterna $t_n, n = N-1, N-2, ..., 2, 1, 0$, motsvarande optionspriser

$$v_j^n = \max(g_j^n, e^{-rh}(pv_j^{n+1} + qv_{j+1}^{n+1}))$$

för $j = 0, 1, ..., n$. Storheten v_0^0 approximerar det sökta optionsvärdet.

Vi avslutar detta kapitel med några resultat av allmänt intresse i samband med utdelningar och amerikanska kontrakt.

Först utreds varför det inte kan vara optimalt att lösa in en amerikansk köpoption i intervallet $[t, t_1]$, där $t_1 < t_*$ är en i förväg given tidpunkt. Olikheten

$$C(t_1, S(t_1), K; T) \geq S(t_1) - K$$

dvs

$$C(t_1, S(t_1), K; T) \geq S(t_1) - \frac{K}{B(t_1)} B(t_1)$$

ger nämligen att

$$C(t, S(t), K; T) \geq S(t) - \frac{K}{B(t_1)} B(t) > S(t) - K.$$

Förekomst av utdelning innebär dock att det kan vara optimalt att lösa in en amerikansk köpoption med lösenpriset K precis före utdelningen D frånskiljs. Vid tiden t_*, då utdelningen D avskilts, är

$$C(t_*, S(t_*), K; T) = c(t_*, S(t_*), K; T).$$

Om optionen inlöses vid tiden t_*- erhålls beloppet

$$S(t_*-) - K.$$

Härav följer att

$$C(t_*-, S(t_*-), K; T) = \max(S(t_*-) - K, c(t_*, S(t_*), K; T)).$$

Genom att utnyttja relationen

$$S(t_*-) = S(t_*) + D$$

erhålls

$$C(t_*-, S(t_*-), K; T) = \max(S(t_*) - (K - D), c(t_*, S(t_*), K; T)).$$

Eftersom

$$\frac{\partial c}{\partial s} = \Phi(d_1) < 1$$

följer att det finns högst ett positivt tal s_C sådant att

$$S(t_*) - (K - D) > c(t_*, S(t_*), K; T)) \text{ om } S(t_*) > s_C$$

och

$$S(t_*) - (K - D) < c(t_*, S(t_*), K; T)) \text{ om } S(t_*) < s_C.$$

Råkar

$$S(t_*-) > s_C + D$$

är det därför optimalt att lösa in den amerikanska köpoptionen vid tiden $t_* -$. Om

$$D \leq K(1 - e^{-r\tau_*})$$

där $\tau_* = T - t_*$, så är det inte optimalt med inlösen vid tiden t_*- hur stort $S(t_*-)$ än är. I detta fall är nämligen

$$S(t_*) - (K - D) \leq S(t_*) - Ke^{-r\tau_*}$$

och

$$c(t_*, S(t_*), K; T)) = e^{-r\tau_*} E\left[\max(0, se^{r\tau_*} M_\sigma(\tau_*) - K)\right]_{|s=S(t_*)}$$

$$= E\left[\max(0, sM_\sigma(\tau_*) - e^{-r\tau_*}K)\right]_{|s=S(t_*)} > E\left[sM_\sigma(\tau_*) - e^{-r\tau_*}K)\right]_{|s=S(t_*)}$$

$$= S(t_*) - Ke^{-r\tau_*}$$

varför

$$S(t_*) - (K - D) < c(t_*, S(t_*), K; T)).$$

Vi har här utnyttjat att $E[X] > 0$ för varje stokastisk variabel X som uppfyller $X \geq 0$ och ej är lika med noll med sannolikheten 1.

Vi har redan i kapitel 1 påpekat att det kan vara optimalt att lösa in en amerikansk säljoption före slutdagen. Betrakta nu en amerikansk aktiesäljoption med slutdagen T där aktien utdelar beloppet D vid tiden $t_* < T$. Vi skall visa att det ej är optimalt att lösa in denna option i intervallet $]t_0, t_*[$ där $t_0 < t_*$ väljs så att

$$D \geq K(e^{r(t_*-t_0)} - 1).$$

Det räcker därför att för ett godtyckligt $t \in]t_0, t_*[$ visa att $P(t, S(t), K; T) > K - S(t)$. Antag därför att $P(t, S(t), K; T) = K - S(t)$ och bilda vid tiden t en portfölj $\mathcal{A}$ bestående av 1 säljoption av det aktuella slaget, 1 aktie och $-K/B(t)$ obligationer. Det gäller att

$$V_{\mathcal{A}}(t) = (K - S(t)) + S(t) - K = 0.$$

Genom att lösa in optionen omedelbart efter utdelningen frånskilts aktien följer att

$$V_{\mathcal{A}}(t_*) = D + K - \frac{K}{B(t)} B(t_*) =$$

$$D + K(1 - e^{r(t_*-t)}) > D + K(1 - e^{r(t_*-t_0)}) \geq 0$$

och det uppstår ett arbitrage. Alltså är $P(t, S(t), K; T) > K - S(t)$ och det är därmed ej optimalt att lösa in säljoptionen i tidsintervallet $]t_0, t_*[$.

Övningar

1. Låt $t < t_* < T$ och antag att aktien utdelar beloppet $\delta S(t_*-)$ vid tiden t_* där δ är ett i förväg känt tal i intervallet $]0, 1[$. Bestäm värdet vid tiden t för ett derivat i aktien som utbetalar beloppet $S(T)$ vid tiden T.

2. Låt $t < t_* < T$ och antag att aktien utdelar beloppet $\delta S(t_*-)$ vid tiden t_* där δ är ett i förväg känt tal i intervallet $]0, 1[$. Visa att

$$S_{term}^T(t) = (1 - \delta) e^{r\tau} S(t).$$

Hur ändras formeln om det istället är fråga om utdelning av ett fixt belopp D?

3. En aktieköpoption av europeisk typ har slutdag den 17 maj och lösenpris 99 kr. Den 17 mars står aktien i 100 kr och aktien delar ut 3 kr och 50 öre den 17 april. Bestäm teoretiskt pris för optionen den 17 mars då räntan är 5% per år och volatiliteten 31% per år.

4. En forwardstartande aktiesäljoption av europeisk typ utbetalar beloppet $\max(0, S(T_0) - S(T))$ slutdagen T. Bestäm säljoptionens pris vid tiden t_0 då aktien utdelar beloppet $\delta S(t_*-)$ vid tidpunkten t_*, där $T_0 < t_* < T$ och $0 < \delta < 1$.

5. Ett aktiederivat av europeisk typ utbetalar slutdagen T beloppet

$$\max(S(T), K)$$

där K är en given positiv konstant. Aktien utdelar det kända beloppet D vid tiden $t_* < T$. Bestäm derivatets värde vid tiden $t < t_*$ (aktiepriset vid tiden t är strikt större än D).

6. En viss konvertibel kan bytas mot en aktie vid varje tidpunkt $t \in [0, T[$. Om byte till aktie ej skett vid tidpunkten T inlöses konvertibeln och innehavaren erhåller beloppet K. Beskriv hur konvertibelns värde tiden vid tiden $t < T$ kan bestämmas då aktien ger utdelningen D vid tiden $t_* \in]t, T[$.