LÖSNINGAR
OPTIONER OCH MATEMATIK (CTH[$TMA155$],GU[$MAM690$])

Skrivningsdag: 28 jan 2006, 4 timmar
Inga hjälpmedel.
Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.

1. (Bachelier-Samuelsons modell) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{t\to\infty} P\left[S(t) \geq S(0)e^{rt}\right].$$

Lösning: Eftersom

$$S(t) = S(0)e^{\alpha t + \sigma W(t)}$$

är

$$P\left[S(t) \geq S(0)e^{rt}\right] = P\left[(\alpha - r)t + \sigma W(t) \geq 0\right] = P\left[-W(t) \leq \frac{(\alpha - r)t}{\sigma}\right]$$

$$= P\left[-W(1) \leq \frac{(\alpha - r)\sqrt{t}}{\sigma}\right] = \Phi(\frac{(\alpha - r)\sqrt{t}}{\sigma}).$$

Härav följer att

$$\lim_{t\to\infty} P\left[S(t) \geq S(0)e^{rt}\right] = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ om } \alpha > r \\ \frac{1}{2} \text{ om } \alpha = r \\ 0 \text{ om } \alpha < r \end{array} \right\} \leftarrow SVAR$$

2. (Binomialmodellen med $T = 2$, $d = 0$, $u = 2$, $r = 1$ och $S(0) = 1$) Ett aktiederivat av europeisk typ utbetalar slutdagen 2 beloppet

$$Y = \max_{0\leq t\leq 2} S(t) - \min_{0\leq t\leq 2} S(t).$$

Bestäm derivatets pris vid tiden 0.

Lösning: Sätt

$$S(t+1) = S(t)e^{X_{t+1}},\ t = 0, 1$$

och låt $v(t)$ beteckna derivatets pris vid tiden t. Vi har

$$\begin{aligned} v(2)_{|X_1=u,X_2=u} &= e^4-1 \\ v(2)_{|X_1=u,X_2=d} &= e^2-1 \\ v(2)_{|X_1=d,X_2=u} &= e^2-1 \\ v(2)_{|X_1=d,X_2=d} &= 0. \end{aligned}$$

Vidare gäller att

$$q_u = \frac{e-1}{e^2-1} = \frac{1}{e+1}$$

och

$$q_d = \frac{e}{e+1}.$$

Vi får nu

$$\begin{aligned} v(1)_{|X_1=u} &= e^{-1}(\frac{1}{e+1}(e^4-1)+\frac{e}{e+1}(e^2-1)) = \frac{e^3+e^2-1-e^{-1}}{e+1} \\ v(1)_{|X_1=d} &= e^{-1}(\frac{1}{e+1}(e^2-1)+\frac{e}{e+1}0) = 1-e^{-1}. \end{aligned}$$

Alltså blir

$$v(0) = e^{-1}(\frac{e^3+e^2-1-e^{-1}}{(e+1)^2}+\frac{e}{e+1}(1-e^{-1}))$$

$$= e^{-1}\frac{e^3+e^2-1-e^{-1}+e^2-1}{(e+1)^2}$$

$$= \frac{e^2+2e-e^{-2}-2e^{-1}}{(e+1)^2} = 1-e^{-2}.$$

3. (Black-Scholes modell) Antag $G \in N(0,1)$. Ett enkelt aktiederivat av europeisk typ med utbetalningsfunktionen $g \in \mathcal{P}$ och slutdagen T har priset $v(t, S(t))$ vid tiden t, där

$$v(t,s) = e^{-r\tau} E\left[g(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau+\sigma\sqrt{\tau}G})\right]$$

och $\tau = T - t$. Visa att om $\tau > 0$ så gäller att

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \left\{r+\frac{1}{2\tau}\right\} v(t,s) - e^{-r\tau} E\left[g(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau+\sigma\sqrt{\tau}G})\left\{\frac{G^2}{2\tau}+\frac{(r-\frac{\sigma^2}{2})G}{\sigma\sqrt{\tau}}\right\}\right].$$

Lösning: Det gäller att

$$v(t,s)=e^{-r\tau}\int_{-\infty}^{\infty}g(e^{\ln s+(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau+\sigma\sqrt{\tau}x})\varphi(x)dx$$

där

$$\varphi(x)=\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Variabelbytet $\ln y=\ln s+(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau+\sigma\sqrt{\tau}x$ ger

$$v(t,s)=\frac{e^{-r\tau}}{\sigma\sqrt{\tau}}\int_0^{\infty}g(y)\varphi(\frac{\ln\frac{y}{s}-(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}})\frac{dy}{y}$$

och

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,s)=\left\{\frac{re^{-r\tau}}{\sigma\sqrt{\tau}}+\frac{e^{-r\tau}}{2\sigma\sqrt{\tau}\tau}\right\}\int_0^{\infty}g(y)\varphi(\frac{\ln\frac{y}{s}-(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}})\frac{dy}{y}$$

$$-\frac{e^{-r\tau}}{\sigma\sqrt{\tau}}\int_0^{\infty}g(y)\frac{\ln\frac{y}{s}-(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\varphi(\frac{\ln\frac{y}{s}-(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}})\left\{\frac{\ln\frac{y}{s}-(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau}{2\sigma\sqrt{\tau}\tau}+\frac{r-\frac{\sigma^2}{2}}{\sigma\sqrt{\tau}}\right\}\frac{dy}{y}$$

$$=\left\{r+\frac{1}{2\tau}\right\}\frac{e^{-r\tau}}{\sigma\sqrt{\tau}}\int_0^{\infty}g(y)\varphi(\frac{\ln\frac{y}{s}-(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}})\frac{dy}{y}$$

$$-\frac{e^{-r\tau}}{\sigma\sqrt{\tau}}\int_0^{\infty}g(y)\frac{\ln\frac{y}{s}-(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\varphi(\frac{\ln\frac{y}{s}-(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}})\left\{\frac{\ln\frac{y}{s}-(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau}{2\sigma\sqrt{\tau}\tau}+\frac{r-\frac{\sigma^2}{2}}{\sigma\sqrt{\tau}}\right\}\frac{dy}{y}$$

$$=\left\{r+\frac{1}{2\tau}\right\}v(t,s)$$

$$-e^{-r\tau}\int_0^{\infty}g(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau+\sigma\sqrt{\tau}x})x\varphi(x)\left\{\frac{x}{2\tau}+\frac{r-\frac{\sigma^2}{2}}{\sigma\sqrt{\tau}}\right\}dx=$$

$$\left\{r+\frac{1}{2\tau}\right\}v(t,s)$$

$$-e^{-r\tau}E\left[g(se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau+\sigma\sqrt{\tau}G})\left\{\frac{G^2}{2\tau}+\frac{(r-\frac{\sigma^2}{2})G}{\sigma\sqrt{\tau}}\right\}\right].$$

4. Visa att

$$S(t) - c(t, S(t), K; T) = Ke^{-r(T-t)} - p(t, S(t), K; T)$$

om dominansprincipen gäller.

5. Bestäm Black-Scholes pris för en aktieköpoption av europeisk typ med lösenpriset K och slutdagen T. (Ledning: Första delen av formuleringen av problem 3.)