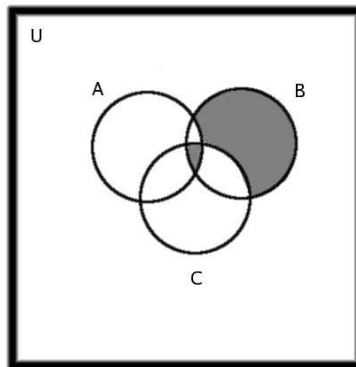


Matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Lösningar till
Tentamen i Introduktionskurs D, TMA220, 2006-09-02
Tentamen i Introduktionskurs Datavetenskapligt program, MAM010, 2006-09-02.

1. Notera att $C = \{4, 5, 6\}$.
 - (a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$
 - (b) $A \cap B = \{4\}$
 - (c) $(A \cup C) = \{1, 2, 4, 5, 6\}$, $(A \cup C) \setminus B = \{1, 2, 5\}$
 - (d) $|A \cup B| = 6$
 - (e) $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 4\}\}$
2. (a) Venndiagrammet ser ut så här:



- (b) Man kan t ex ta $A = B = \emptyset$ och C någon icke-tom mängd. Då är
$$A \cap (B \cup C) = \emptyset \neq C = (A \cap B) \cup C.$$
3. (a) Förslag på funktion $f : A \rightarrow B$ är $f(x) =$ 'Det antal poäng som person x får på tentan'.

Funktionen är *surjektiv* om varje poängantal uppnåtts av minst en student.

Funktionen är inte *injektiv* eftersom det är fler än 51 personer som skrivit tentan och det endast finns 51 möjliga poängsummer. Alltså måste minst två personer ha fått samma poängresultat.

Eftersom funktionen inte är injektiv så kan den inte vara *inverterbar*.
- (b) För exempel på bijektiva funktioner kan man titta i kursboken.

4. (a) \star är kommutativ ty $x \star y = 2xy - x - y + 2$ och $y \star x = 2yx - y - x + 2 = x \star y$ eftersom multiplikation och addition av reella tal är kommutativ.

Operatorn \star är inte associativ vilket följer av att

$$a \star (b \star c) = 4abc - 2ab - 2ac - 2bc + 3a + b + c$$

och

$$(a \star b) \star c = 4abc - 2ac - 2bc - 2ab + a + b + 3c.$$

Alltså

$$a \star (b \star c) \neq (a \star b) \star c \text{ om } a \neq c.$$

För en identitet $e \in \mathbb{R}$ ska det gälla att $e \star a = a \star e = a$ för alla $a \in \mathbb{R}$. Här får vi då att

$$e \star a = 2ea - a + 2 = a.$$

Vi löser ut e och får då

$$e = \frac{2a - 2}{2a - 1}.$$

Eftersom e beror av a så saknas identitet.

Eftersom \star saknar identitet så kan den inte heller ha någon invers.

- (b) \diamond är kommutativ ty $\max(a, b) = \max(b, a) =$ största elementet oavsett ordning.

\diamond är associativ eftersom man alltid får ut det maximala elementet av tre oavsett vilken ordning man jämför dem i.

\diamond har 0 som identitet ty $\max(0, a) = a$.

Det enda element som har invers är 0 eftersom $a \diamond b = 0 \Rightarrow a = b = 0$.

5. (a) Definitionsmängden till $f(x)$ är \mathbb{R} och målmängden är $(0, 1]$.
 (b) Definitionsmängden till $g(x)$ är $\{x \in \mathbb{R} : x \neq -1\}$.
 (c) $h \circ g = h\left(\frac{1}{1+x}\right) = \frac{1}{1/(1+x)} = 1 + x$.
 (d) Inversen till $g(x)$ är funktionen $g^{-1}(y)$ sådan att $g^{-1}(y) = x$ då $g(x) = y$. Lös därför ekvationen $\frac{1}{1+x} = y$ med avseende på x och vi får då inversen $g^{-1}(y) = x = \frac{1}{y} - 1$.

6.

$$S = \sum_{n=1}^{99} (100 - n) = 99 + 98 + 97 + \dots + 2 + 1$$

$$2S = 99+98+97+\dots+2+1+1+2+\dots+98+99 = 100+100+\dots+100 = 99 \cdot 100$$

$$\text{Vi får } S = \sum_{n=1}^{99} (100 - n) = \frac{99 \cdot 100}{2} = 4950.$$