Matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Lösningar till
Tentamen i Introduktionskurs D, TMA220, 2011-08-27
Tentamen i Introduktionskurs Datavetenskapligt program, MMGD00, 2011-08-27.

1.

$$\sum_{k=-3}^{2} \frac{k}{k+\frac{1}{2}} = \frac{-3}{-3+\frac{1}{2}} + \frac{-2}{-2+\frac{1}{2}} + \frac{-1}{-1+\frac{1}{2}} + \frac{0}{0+\frac{1}{2}} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}} + \frac{2}{2+\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{6}{5} + \frac{4}{3} + 2 + \frac{2}{3} + \frac{4}{5} = 6.$$

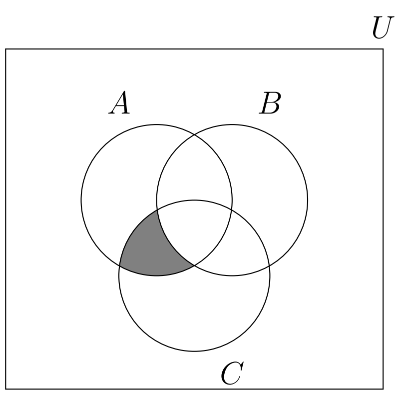
2. (a) Potensmängden $\mathcal{P}(A)$ är mängden av alla delmängder till A. Delmängderna till $A = \{1, 2\}$ är $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$ och $\{1, 2\}$. Alltså blir

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$$

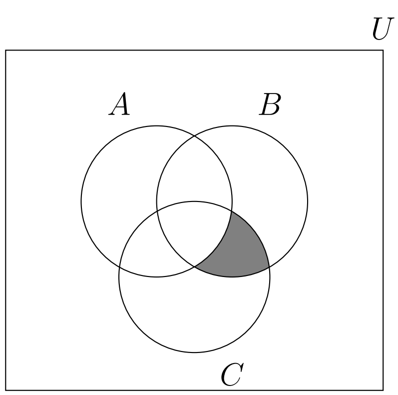
(b) Den Kartesiska produkten $A \times \mathcal{P}(A)$ är mängden av alla ordnade par (x, y) sådana att $x \in A$ och $y \in \mathcal{P}(A)$. Alltså är

$$\begin{aligned} A \times \mathcal{P}(A) \quad = \quad & \{(1, \emptyset), (1, \{1\}), (1, \{2\}), (1, \{1, 2\}), \\ & (2, \emptyset), (2, \{1\}), (2, \{2\}), (2, \{1, 2\})\}. \end{aligned}$$

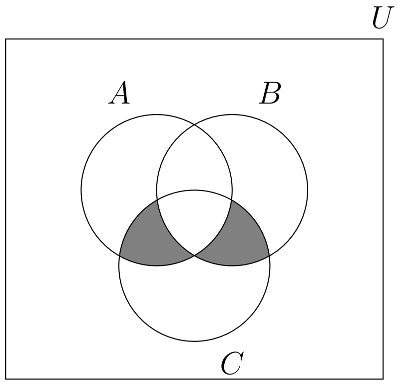
3. (a) Venn-diagram för $A \cap (C \setminus B)$:



Venn-diagram för $B \cap (C \setminus A)$:



Venn-diagram för $(A \Delta B) \cap C$:



(b) Från Venn-diagrammen ovan ser vi att de två områdena som $\big(A \cap (C \setminus B)\big)$ och $\big(B \cap (C \setminus A)\big)$ täcker överensstämmer exakt med de som $(A \Delta B) \cap C$ täcker vilket motiverar att de är lika.

4. (a) Vi får att

$$f \circ g(x) = f(1 - x^2) = \frac{1}{(1 - x^2)^2 + 1} = \frac{1}{2 - 2x^2 + x^4}$$

och

$$g \circ f(x) = g\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right) = 1 - \left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)^2 = \frac{x^4 + 2x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

(b) Vi får ekvationen

$$1 - x^2 = \frac{1}{x^2 + 1} \Longleftrightarrow (1 - x^2)(1 + x^2) = 1 \Longleftrightarrow 1 - x^4 = 1,$$

så $x = 0$ är det enda x för vilket $f(x) = g(x)$.

5. När $x < 0$ så är funktionen strängt växande från minus oändligheten och (nästan) upp till -2. Den antar alltså då alla värden i det öppna intervallet $(-\infty, -2)$ exakt en gång.

När $x \geq 0$ så är också funktionen strängt växande och nu från 0 upp mot oändligheten. Den antar alltså då alla värden i det halvöppna intervallet $[0, \infty)$ exakt en gång.

(a) Vi ser alltså att funktionen inte antar samma värde mer än en gång och är därför injektiv.

(b) Resonemanget ovan ger också att

$$f(\mathbb{R}) = (-\infty, -2) \cup [0, \infty) \subset \mathbb{R}$$

så värdemängden är en äkta delmängd av målmängden och därför är den inte surjektiv.

(c) Eftersom den inte är surjektiv är den inte heller bijektiv och alltså inte inverterbar.

6. (a) Ja, den är kommutativ ty

$$(c+dx)\star(a+bx) = (ca-db)+(da+cb)x = (ac-bd)+(ad+bc)x = (a+bx)\star(c+dx)$$

eftersom multiplikation av tal är kommutativ.

(b) Ja, den är associativ ty

$$\begin{aligned} ((a+bx)\star(c+dx)) \quad \star &\quad (e+fx) = ((ac-bd)+(ad+bc)x)\star(e+fx) \\ &= (ac-bd)e-(ad+bc)f+((ac-bd)f+(ad+bc)e)x \\ &= (ace-bde-adf-bcf)+(acf-bdf+ade+bce)x \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} (a+bx)\star((c+dx) \quad \star &\quad (e+fx)) = (a+bx)\star((ce-df)+(cf+de)x) \\ &= a(ce-df)-b(cf+de)+(a(cf+de)+b(ce-df))x \\ &= (ace-bde-adf-bcf)+(acf-bdf+ade+bce)x \end{aligned}$$

där vi utnyttjar att multiplikation av tal är associativ och kommutativ.

(c) Ja, konstanta poynomet $1 = 1 + 0x$ är en identitet, ty

$$(1+0x)\star(a+bx) = 1\cdot a - 0\cdot b + (1\cdot b + 0\cdot x)x = a+bx$$

och vice versa eftersom den är kommutativ.

(d) Om man sätter $x^2 = -1$ så är operatorn helt enkelt multiplikation av poynom med denna extra regel, så i själva verket är det multiplikation av komplexa tal om man tänker sig att $a+bx$ betyder $a+bi$.