Matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Lösningar till
Tentamen i Introduktionskurs D, TMA220, 2012-09-01
Tentamen i Introduktionskurs Datavetenskapligt program, MMGD00, 2012-09-01.

1. (a)
$$\sum_{i=1}^{9} \frac{1}{3 \cdot 2^i}$$
   (b)
$$\sum_{k=1}^{5} \frac{k}{k+2} = \frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{5} + \frac{4}{6} + \frac{5}{7} = \frac{197}{70}$$

2. (a) $A \cup B = \{-2, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
   (b) $A \cap C = \emptyset$
   (c) $B \cap C = \{5, 7, 9\}$
   (d) $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{-2\}, \{2\}, \{-2, 2\}\}$

3. (a) $g((a, b, c, d)) = (d, a, b, c)$ är det naturliga valet.
   (b) Vänsterskiftet $g^{-1}((a, b, c, d)) = (b, c, d, a)$ är invers till högerskiftet g.

4. (a) Ett exempel är $A = \{(A, 1), (G, 8), (H, 3)\}$.
   (b) Låt $M_3 = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Då representerar $M_1 \times M_2 \times M_3$ de n stycken Schackbrädena, indexerade av M_3. T.ex. $(E, 8, 5)$ är ursprungspositionen $(E, 8)$ för svart kung på schackbräde 5.
   (c) Låt $M_4 = \{1, 2, 3, \ldots, 200\}$. Då representerar $M_1 \times M_2 \times M_3 \times M_4$ de n stycken Schackbrädena med 200 drag vardera, indexerade av M_3 som innan, och av M_4 för vilket drag i ordningen det är. T.ex. $(E, 8, 5, 15)$ är position $(E, 8)$ för parti 5, drag 15.

5. (a) Nej! Det finns alltid fler än en tom ruta (m_1, m_2) som kommer att avbilda $f((m_1, m_2)) =$ tom ruta.
   (b) Svaret beror på hur många pjäser som är tagna vid den givna observationen. Om det finns pjäser av alla 12 sorter kvar så är f surjektiv. Annars inte.

6. (a) Ja, den är kommutativ ty
$$(c+dx)\star(a+bx) = (ca+3db)+(da+cb)x = (ac+3bd)+(ad+bc)x = (a+bx)\star(c+dx)$$
   eftersom multiplikation av tal är kommutativ.

(b) Ja, den är associativ ty

$$\begin{aligned}((a+bx)\star(c+dx)) \star (e+fx) &= ((ac+3bd)+(ad+bc)x)\star(e+fx)\\ &= (ac+3bd)e+3(ad+bc)f+((ac+3bd)f+(ad+bc)e)x\\ &= (ace+3bde+3adf+3bcf)+(acf+3bdf+ade+bce)x\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}(a+bx)\star((c+dx) \star (e+fx)) &= (a+bx)\star((ce+3df)+(cf+de)x)\\ &= a(ce+3df)+3b(cf+de)+(a(cf+de)+b(ce+3df))x\\ &= (ace+3bde+3adf+3bcf)+(acf+3bdf+ade+bce)x\end{aligned}$$

där vi utnyttjar att multiplikation av tal är associativ och kommutativ.

(c) Ja, konstanta poynomet $1 = 1 + 0x$ är en identitet, ty

$$(1+0x)\star(a+bx) = 1\cdot a + 3\cdot 0\cdot b + (1\cdot b + 0\cdot x)x = a + bx$$

och vice versa eftersom den är kommutativ.