

Matematiska vetenskaper

Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet

Tentamen i Introduktionskurs D, TMA220, 2012-09-01.

Tentamen i Introduktionskurs Datavetenskapligt program, MMGD00, 2012-09-01.

Inga hjälpmedel är tillåtna, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Oskar Hamlet, 0703-088304.

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För godkänt krävs minst 20 poäng sammanlagt.

1. (a) Skriv summan

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \dots + \frac{1}{1536}$$

med summasymbolen \sum .

- (b) Beräkna summan

$$\sum_{k=1}^5 \frac{k}{k+2}$$

exakt. Förkorta svaret så långt det går.

(7p)

2. Låt $A = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 = 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} : 3 < x < 11\}$ och $C =$ "mängden av alla udda heltal".

- (a) Vad är $A \cup B$?
(b) Vad är $A \cap C$?
(c) Vad är $B \cap C$?
(d) Vad är $\mathcal{P}(A)$?

(10p)

3. Betrakta $\mathbb{R}^4 = \{(a, b, c, d) : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R}\}$. Vi definierar en unär operator $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ som skiftar elementen (a, b, c, d) ett steg åt höger och lägger till en nolla till vänster, d.v.s. $f((a, b, c, d)) = (0, a, b, c)$. Vi kallar f ett "högerskift". Tyvärr kan vi inte definiera en invers till f eftersom den inte är injektiv och inte heller surjektiv.

- (a) Definiera ett nytt högerskift g som är bijektivt, där $g((a, b, c, d)) = (?, a, b, c)$. Bestäm vad som ska vara i elementet längst till vänster efter skiftet, där ? syns. Här finns flera möjligheter men kanske bara ett riktigt naturligt val.
(b) Bestäm inversen till g .

(6p)

Var god vänd!

4. Betrakta mängderna $M_1 = \{A, B, C, \dots, H\}$ och $M_2 = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$. Med den kartesiska produkten $M_1 \times M_2$ kan vi representera ett schackbräde, där t.ex. $(A, 1) \in M_1 \times M_2$ är den hörnruta där vit spelares vänstra torn startar och $(H, 1) \in M_1 \times M_2$ den hörnruta där dess högra torn startar. Ett datorprogram ska bokföra dragen i en turnering där n stycken partier ska spelas och vi ska skapa en datastruktur för ändamålet.
- Ge ett exempel på ett element $A \in \mathcal{P}(M_1 \times M_2)$, sådant att $|A| = 3$.
 - Skapa en lämplig mängd för att få en datastruktur som representerar n stycken schackbräden. Tips: Använd återigen den kartesiska produkten och en mängd med n element.
 - Datastrukturen är ännu inte redo för sin uppgift. Följ samma princip som för förra deluppgiften för att åstadkomma så att varje parti har 200 drag vardera.

(10p)

5. Vi återvänder till schackbrädet i förra uppgiften. Definiera mängden B som mängden av alla olika innehåll en ruta på schackbrädet kan ha. Rutan kan vara tom och så kan den innehålla 12 olika typer av pjäser. Om man tänker sig pjäserna ordnade efter färg och viktighet så är alltså

$$B = \{\text{tom ruta, vit bonde, } \dots, \text{vit kung, svart bonde, } \dots, \text{svart kung}\}.$$

Under ett av partierna, i turneringen som omnämndes i förra uppgiften, observerar vi ett drag och bokför det genom att definiera en funktion $f: M_1 \times M_2 \rightarrow B$ där $f((m_1, m_2)) \in B$ anger vad som finns på ruta $(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2$ på schackbrädet.

- Är f injektiv?
- Är f surjektiv?

(7p)

6. Låt A vara mängden av alla förstgradspolynom med heltalskoefficienter, dvs

$$A = \{f : f(x) = a + bx, a, b \in \mathbb{Z}, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}.$$

Vi definierar en operator, \star , på A genom

$$(a + bx) \star (c + dx) = (ac + 3bd) + (ad + bc)x.$$

- Är operatören kommutativ?
- Är operatören associativ?
- Finns det någon identitet? Bestäm i så fall den.

(10p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade den 22 september. Tentorna kommer att visas vid lämpligt tillfälle som meddelas på hemsidan och kan sedan om man missar dettas avhämtas på expeditionen på Institutionen för matematiska vetenskaper som har öppet vardagar 9.00-13.00.

LYCKA TILL!

Stefan.