Matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Lösningar till
Tentamen i Introduktionskurs D, TMA220, 2013-08-31
Tentamen i Introduktionskurs Datavetenskapligt program, MMGD00, 2013-08-31.

1. (a) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ och $C = \{1\}$
   (b) $A \cup C = A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
   (c) $A \cap C = C = \{1\}$
   (d) $B \cap A = \{1, 2, 3\}$
   (e) $\mathcal{P}(C) = \{\emptyset, \{1\}\}$

2. (a) Vi ser att täljaren består av successiva potenser av 2 och att nämnaren ökar med 2 i varje steg så om man väljer att starta med index 1 så får man
$$\sum_{i=1}^{8} \frac{2^i}{2i+1}.$$
   (b) Om man tar $N = 6$ så får man
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{7}{12} + \frac{11}{30} = \frac{57}{60} = \frac{19}{20}$$
så det räckte inte riktigt. Däremot är $1/7 > 1/20$ så $N = 7$ är det minsta tal så att summan är större än 1.

3. (a) Antag att A har n element och vi betecknar dem med $a_1, a_2, \dots, a_n$. Vi sätter $b_i = f(a_i)$ för alla i. Vi har $b_i \in B$ för alla i eftersom B är f:s målmängd. Dessutom är alla b_i olika eftersom f är injektiv. Till slut är f också surjektiv så för alla element $b \in B$ gäller att $b = f(a_i)$ för något a_i. Alltså är $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ och eftersom de alla är olika så är $|B| = n = |A|$.
   (b) Funktionen $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^{\text{even}}$, $g(n) = 2n$ är bijektiv. I andra riktningen kan man välja dess invers $h\colon \mathbb{Z}^{\text{even}} \to \mathbb{Z}$ med $h(n) = n/2$.
   (c) Funktionen $i\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ som ges av $i(n) = n$ är en injektiv funktion och därmed har vi visat att $|\mathbb{Z}| \leq |\mathbb{R}|$.

4. En direkt beräkning ger att
$$f^2(x) = f \circ f(x) = f(f(x)) = f(2-x) = 2 - (2-x) = x.$$
Alltså är $f^2 = id_{\mathbb{R}}$, d.v.s. identitetsfunktionen på $\mathbb{R}$. Eftersom sammansättningen av $id_{\mathbb{R}}$ med sig själv blir $id_{\mathbb{R}}$, så kommer
$$f^{2k} = id_{\mathbb{R}}$$
för alla positiva heltal k. För de udda potenserna får vi då att
$$f^{2k+1} = f \circ f^{2k} = f \circ id_{\mathbb{R}} = f.$$

5. Bijektiviteten hos g ger att för varje $b_2 \in \mathbb{R}$ finns ett entydigt tal $a_2 = g^{-1}(b_2)$. För varje $b_1 \in \mathbb{R}$ existerar ett entydigt tal $a_1 \in \mathbb{R}$ sådan att $b_1 = a_1 + a_2 = a_1 + g^{-1}(b_2)$. Därför är f bijektiv. Inversen ges av

$$f^{-1}(b_1, b_2) = (b_1 - g^{-1}(b_2), g^{-1}(b_2)).$$

6. (a) Nej det är den inte, t.ex. är

$$(0,1,2) \star (1,2,3) = (0,3,6) \text{ men } (1,2,3) \star (0,1,2) = (0,5,6).$$

   (b) Ja, ty

$$\begin{aligned}((a_1, a_2, a_3) \star (b_1, b_2, b_3)) \star (c_1, c_2, c_3) &= (a_1b_1, a_1b_2 + a_2b_3, a_3b_3) \star (c_1, c_2, c_3)\\ &= (a_1b_1c_1, a_1b_1c_2 + (a_1b_2 + a_2b_3)c_3, a_3b_3c_3)\end{aligned}$$

   och

$$\begin{aligned}(a_1, a_2, a_3) \star ((b_1, b_2, b_3) \star (c_1, c_2, c_3)) &= (a_1, a_2, a_3) \star (b_1c_1, b_1c_2 + b_2c_3, b_3c_3)\\ &= (a_1b_1c_1, a_1(b_1c_2 + b_2c_3) + a_2b_3c_3, a_3b_3c_3)\end{aligned}$$

   och vi ser att alla tre koordinaterna är identiska.

   (c) Om $e = (e_1, e_2, e_3)$ ska vara en identitet så ska den uppfylla att

$$(e_1, e_2, e_3) \star (b_1, b_2, b_3) = (b_1, b_2, b_3) \star (e_1, e_2, e_3) = (b_1, b_2, b_3)$$

   för alla $(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{Z}^3$. Vi får speciellt att

$$(b_1, b_2, b_3) = (e_1, e_2, e_3) \star (b_1, b_2, b_3) = (e_1b_1, e_1b_2 + e_2b_3, e_3b_3)$$

   vilket ger ekvationerna $b_1 = e_1b_1$, $b_2 = e_1b_2 + e_2b_3$ och $b_3 = e_3b_3$. Den första och sista ger $e_1 = e_3 = 1$. Sätter vi in $e_1 = 1$ i den andra ekvationen får vi $e_2 = 0$. Eftersom operatorn inte är kommutativ så måste vi kolla att det stämmer också med omvänd ordning, och det ser vi att det gör ty

$$(b_1, b_2, b_3) \star (1,0,1) = (b_1 \cdot 1, b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 1, b_3 \cdot 1) = (b_1, b_2, b_3).$$

   Alltså är $(1,0,1)$ en identitet.