

Matematiska vetenskaper

Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet

Lösningar till

Tentamen i Introduktionskurs D, 2014-08-30

Tentamen i Introduktionskurs Datavetenskapligt program, MMGD00, 2014-08-30.

1.

$$\begin{aligned}A &= \{4, 5, 6, 7, 8, 9\} \\B &= \{0, 1, 7, 8, 9\} \\A \cap B &= \{7, 8, 9\} \\A \cup B &= \{0, 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \\A \setminus B &= \{4, 5, 6\}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\left| \sum_{k=-4}^1 \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \right| &= \left| \frac{1}{-4 + \frac{1}{2}} + \frac{1}{-3 + \frac{1}{2}} + \frac{1}{-2 + \frac{1}{2}} + \frac{1}{-1 + \frac{1}{2}} + \frac{1}{0 + \frac{1}{2}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} \right| = \\&= \left| -\frac{2}{7} - \frac{2}{5} - \frac{2}{3} - 2 + 2 + \frac{2}{3} \right| = \\&= \left| \frac{-10 - 14}{5 \cdot 7} \right| = \left| -\frac{24}{35} \right| = \frac{24}{35}.\end{aligned}$$

3. (a) Falskt, ty tomma mängden är inget tal och alltså inget element i  $\mathbb{N}$ .  
(b) Sant, tomma mängden är delmängd till alla mängder.  
(c) Falskt, ty  $\mathbb{N}$  innehåller inga negativa tal.  
(d) Sant, ty alla element i  $\{1\}$  är naturliga tal och den innehåller ju långt ifrån alla naturliga tal så det är äkta delmängd.  
(e) Falskt, ty potensmängden innehåller två **mängder** och ingen av dessa finns i  $\mathbb{N}$ .
4. (a) Vi har t.ex. att  $1 \star (2 \star 1) = 1 \star 6 = 7$ , men  $(1 \star 2) \star 1 = 3 \star 1 = 10$ .  
(b) Vi har t.ex. att  $1 \star 0 = 1$ , men  $0 \star 1 = -2$ .  
(c) Vi har att  $x \star y = y \star x$  om och endast om

$$x - 2y + 3xy = y - 2x + 3yx \iff 3x = 3y \iff x = y.$$

Alltså kommuterar  $x$  och  $y$  bara i det triviala fallet då  $x = y$ .

5. (a) För negativa  $x$  avtar funktionen ifrån oändligheten mot 2 eftersom  $-3x$  är strängt avtagande. Funktionen fortsätter avta för positiva  $x$  med start vid 2 eftersom  $-x^2$  är strängt avtagande för positiva  $x$  och går mot minus oändligheten då  $x$  går mot oändligheten. Alltså antar funktionen alla reella tal precis en gång.

- (b) Sätt  $y = g(x)$ . Då är  $x = g^{-1}(y)$ . För  $x < 0$  är  $y > 2$  och då har vi  $y = 2 - 3x$  så  $x = (2 - y)/3$ . Alltså är

$$g^{-1}(y) = \frac{2 - y}{3}, \text{ för } y > 2.$$

För  $x \geq 0$  är  $y \leq 2$  och då har vi  $y = 2 - x^2$  så  $x = \sqrt{2 - y}$ . Alltså är

$$g^{-1}(y) = \sqrt{2 - y}, \text{ för } y \leq 2.$$

Sammantaget får vi alltså

$$g^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{2-y}{3} & \text{för } y > 2, \\ \sqrt{2-y} & \text{för } y \leq 2. \end{cases}$$

6. (a) Om  $f(A, B) = 0$  så gäller att  $A = B$ .  
(b) Om  $f(A, B) = 1$  så gäller att  $A \cap B = \emptyset$ , d.v.s.  $A$  och  $B$  är disjunkta.  
(c)  $f$  är inte injektiv ty t.ex.

$$f(\{5, 7\}, \{1, 5\}) = f(\{1, 2\}, \{1, 3\}).$$

- (d)  $f$  är inte surjektiv eftersom den bara antar rationella tal per definition. Mer precist är  $V_f = \mathbb{Q} \cap [0, 1] \neq [0, 1]$ .